DE VIRIEU

Théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 349-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__349_0>

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

A la page 144 du tome IX des *Nouvelles Annales* (1re série), se trouve une Note ainsi conçue :

Comment démontrer que

$$\frac{x^m-1}{x-1}\,\frac{x^{m-1}-1}{x^2-1}\cdots\frac{x^{m+1-p}-1}{x^p-1}$$

est une fonction entière de x, m *et* p *étant des entiers positifs dont le premier n'est pas inférieur au second.*

1. Posons, b étant un entier positif,

$$F(x, z, m, b) = (1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b}).$$

$F(x, z, m, b)$ est une fontion entière de x et de z et du degré m par rapport à celle-ci ; on peut poser

$$\text{(A)}\qquad (1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b}) = \sum_{p=0}^{p=m}(x_p z^p).$$

2. On a $x_0 = 1$. Dans l'hypothèse $1 \overline{\gtrless} p \leqq m$, x_p est une fonction entière de x, et, comme elle est la somme de produits dont chacun contient p facteurs égaux à des termes différents de la série

$$x^0,\quad x^b,\quad x^{2b},\ldots,\quad x^{(m-1)b},$$

le terme le moins élevé de x_p est de degré égal à

$$0 + b + 2b + \ldots + (p-1)\,b \quad \text{ou} \quad \frac{p-1}{1}\,\frac{p}{2}\,b\,;$$

donc $\dfrac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}}$ est une fonction entière de x.

3. Dans l'identité (A), remplaçons z par zx^b

$$(1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b})\times\frac{1+zx^{mb}}{1+z}=\sum_{p=0}^{p=m}(x_p x^{pb}z^p),$$

d'où

$$\text{(B)}\qquad (1+z)\sum_{p=0}^{p=m}(x_p x^{pb}z^p)=(1+zx^{mb})\sum_{p=0}^{p=m}(x_p z^p),$$

d'où, $1 \overline{\overline{<}} p \leqq m$,

$$\text{(C)}\qquad x^{pb}x_p+x^{(p-1)b}x_{p-1}=x_p+x^{mb}x_{p-1}.$$

4. L'identité C donne les identités suivantes :

$$x_p=x^{(p-1)b}\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{pb}-1}x_{p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{p+r-1}=x^{(p+r-2)b}\frac{x^{(m+2-p-r)b}-1}{x^{(p+r-1)b}-1}x_{p+r-2};$$

multipliant membre à membre,

$$x_{p+r-1}=x^{\frac{2p+r-3}{1}\frac{r}{2}b}\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{pb}-1}\cdots\frac{x^{(m+2-r-p)b}-1}{x^{(p+r-1)b}-1}x_{p-1};$$

posant $p=1$ et remplaçant r par p,

$$\frac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}}=\frac{x^{mb}-1}{x^b-1}\,\frac{x^{(m-1)b}-1}{x^{pb}-1}\cdots\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{bp}-1}.$$

Or, en vertu du n° 2, le premier membre de cette égalité est une fonction entière de x : il en est donc de même du second. C. Q. F. D