

VACHETTE

**Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales
deux à deux, où trois lettres consécutives
sont toujours distinctes**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 337-348

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX
A DEUX, OU TROIS LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS
DISTINCTES**

(voir même tome, p. 299);

PAR M. VACHETTE,

Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

VII. *Abaissement d'ordre du nombre $N_q(r, u, o)$, quand u n'est pas nul.*

L'espèce $N_q(r, u, o)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, u, o)$ tournantes; si l'on commence une tournante par un des u intervalles S_i , on comptera $\frac{u}{2q} N_q(r, u, o)$ permutations.

Autour d'un S_i , abab, que l'on enlève, il peut se produire :

1° Un S_i ou un assemblage équivalent de quatre lettres

$$\left. \begin{array}{l} \underline{fe} \underline{fe} \\ \underline{fe} \underline{ef} \end{array} \right\} \text{ par les formes } \left\{ \begin{array}{l} \underline{fe} \underline{abab} \underline{fe} \\ \underline{fe} \underline{abab} \underline{ef} \end{array} \right.$$

l'assemblage feef équivalent à un S_i , car il n'existe plus de lettres pareilles à e et f dans le reste de la permutation;

2° Un S_j

$$\underline{efe} \text{ par les formes réciproques } \left\{ \begin{array}{l} \underline{e} \underline{abab} \underline{fe} \\ \underline{ef} \underline{abab} \underline{e} \end{array} \right.$$

3° Un assemblage irrégulier de trois lettres

$$\left. \begin{array}{l} \underline{cef} \\ \underline{fec} \end{array} \right\} \text{ par les formes réciproques } \left\{ \begin{array}{l} c \underline{abab} ef \\ ef \underline{abab} e; \end{array} \right.$$

4° Aucun intervalle nouveau.

Dans le deuxième et le troisième cas, la lettre f ne fait plus partie d'aucun autre intervalle; car elle appartient à un S_3 n'ayant point son complémentaire, ce qui est contraire à l'hypothèse $\nu = 0$.

Pour le premier, le deuxième et le quatrième cas, on enlève S_4 et l'on abaisse ainsi à l'ordre $q - 2$; le nombre de permutations relatives à a et b , ainsi compté, devra être multiplié par $q(q - 1)$; car il y a $q(q - 1)$ manières de faire un S_4 avec deux des q lettres distinctes.

Dans le premier cas, on obtient l'espèce $N_{q-2}(r, u, 0)$; un S_4 est remplacé par un autre. Chacune des tournantes de cette espèce, commencée par un des u intervalles S_4 , fournit $2u$ permutations à l'espèce cherchée, si l'on place $\underline{abab}$ au milieu de cet S_4 dont on alterne ou non les deux dernières lettres. La part sera

$$\frac{2u}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u, 0).$$

Dans le deuxième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u - 1, 1)$. Le nombre des S_4 a diminué de 1, et l'on a obtenu un nouvel S_3 sans son complémentaire. Chacune de ces tournantes, commencée par cet S_3 , fournit deux permutations à l'espèce cherchée; car on peut placer $\underline{abab}$ de deux manières dans cet S_3 . La part sera

$$\frac{2}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u - 1, 1).$$

Dans le quatrième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u - 1, 0)$;

le nombre des S_i a diminué de 1. Il reste

$$2q - 4 - 4r - 3(u - 1)$$

lettres, ou isolées, ou initiales d'un des intervalles. Chacune des tournantes commencée par une de ces lettres fournit $2q - 4r - 3u - 1$ permutations à l'espèce cherchée, en plaçant abab devant cette lettre. La part sera

$$\frac{2q - 4r - 3u - 1}{2(q - 2)} N_{q-2}(r, u - 1, 0).$$

La somme de ces trois parts, multipliée par $q(q - 1)$, sera

$$\frac{q(q - 1)}{2(q - 2)} [2u N_{q-2}(r, u, 0) + 2 N_{q-1}(r, u - 1, 1) + (2q - 4r - 3u - 1) N_{q-2}(r, u - 1, 0)].$$

Dans le troisième cas, celui des figures réciproques e abab ef, fe abab e, on enlève e abab e, et l'on abaisse à l'ordre $q - 3$; le nombre des permutations relatives aux trois lettres a, b, e , ainsi compté, devra être multiplié par $q(q - 1)(q - 2)$, car il y a $q(q - 1)(q - 2)$ manières de former une séquence e abab e avec trois des q lettres distinctes. Or on obtient ainsi, dans l'ordre $q - 3$, des espèces composées, quant aux intervalles, de la même manière que les permutations d'ordre $q - 2$, fournies par une des deux figures du premier cas et par celles du deuxième et du quatrième cas. La part sera donc, en changeant q en $q - 1$ dans la somme précédente, multipliée par $q(q - 1)(q - 2)$ au lieu de $q(q - 1)$, et en divisant par 2 le premier terme de la parenthèse, car, e abab e placé au milieu d'un S_i , fgfg, ne devra donner

que la seule figure $fge \underline{abab} efg$, et jamais la figure $gfe \underline{abab} efg$,

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{2(q-3)} [uN_{q-3}(r, u, 0) + 2N_{q-3}(r, u-1, 1) + (2q-4r-3u-3)N_{q-3}(r, u-1, 0)].$$

Si l'on ajoute les deux sommes, on obtient

$$\frac{u}{2q} N_q(r, u, 0);$$

divisant tout par $q(q-1)$, on a la formule $(r, u, 0)$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{2q^2(q-1)} N_q(r, u, 0) \\ &= \frac{1}{2(q-2)} [2uN_{q-2}(r, u, 0) + 2N_{q-2}(r, u-1, 1) \\ & \quad + (2q-4r-3u-1)N_{q-2}(r, u-1, 0)] \\ & \quad + \frac{q-2}{2(q-3)} [uN_{q-3}(r, u, 0) + 2N_{q-3}(r, u-1, 1) \\ & \quad + (2q-4r-3u-3)N_{q-3}(r, u-1, 0)]. \end{aligned}$$

VIII. Cas particuliers de la formule précédente.

Si l'on y fait $r=0$, on obtient la formule $(0, u, 0)$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{2q^2(q-1)} N_q(0, u, 0) \\ &= \frac{1}{2(q-2)} [2uN_{q-2}(0, u, 0) + 2N_{q-2}(0, u-1, 1) \\ & \quad + (2q-3u-1)N_{q-2}(0, u-1, 0)] \\ & \quad + \frac{q-2}{2(q-3)} [2uN_{q-3}(0, u, 0) + 2N_{q-3}(0, u-1, 1) \\ & \quad + (2q-3u-3)N_{q-3}(0, u-1, 0)]. \end{aligned}$$

Elle en comprend deux autres, pour $u=1$ et $u=2$, relatives à deux des espèces que forment $C_{q,2}$; ce sont

les formules $(0, 1, 0)$ et $(0, 2, 0)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2q'(q-1)} N_q(0, 1, 0) \\ &= C_{q-2,2} + \frac{1}{q-2} [N_{q-2}(0, 1, 0) + N_{q-2}(0, 0, 1)] \\ &+ (q-2)C_{q-3,2} + \frac{q-2}{2(q-3)} [N_{q-3}(0, 1, 0) + 2N_{q-3}(0, 0, 1)], \\ & \frac{1}{q^2(q-1)} N_q(0, 2, 0) \\ &= \frac{1}{q-2} \left[2N_{q-2}(0, 2, 0) + N_{q-2}(0, 1, 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q-7}{2} N_{q-2}(0, 1, 0) \right] \\ &+ \frac{q-2}{q-3} \left[N_{q-3}(0, 2, 0) + N_{q-3}(0, 1, 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q-9}{2} N_{q-3}(0, 1, 0) \right]. \end{aligned}$$

Remarques. — 1° La formule $(0, 1, 0)$ ne peut s'appliquer qu'à partir de $q = 6$.

On trouve directement (IV), $N_2(0, 1, 0) = 2$.

Il n'y a ni $N_3(0, 1, 0)$, ni $N_4(0, 1, 0)$; car dans le premier cas abab entraîne ababcc, et dans le deuxième cas ababcdcd.

Pour $N_5(0, 1, 0)$, il ne faut prendre dans la formule que le premier terme

$$\frac{1}{50.4} N_5(0, 1, 0) = C_{3,2} = P_3, \quad \text{d'où} \quad N_5(0, 1, 0) = 10P_3;$$

les autres termes de la formule n'existent point, à l'exception du terme $N_2(0, 1, 0)$ qui ne peut rien fournir; car si l'on place eabab e au milieu de cdcd, on obtient cdeababecd ou eababecdcd de l'espèce $N_5(0, 2, 0)$. Ce résultat se vérifie directement; on a la seule variété

asymétrique abab cdecde; donc

$$N_3(0, 1, 0) = 1.2.5P_3.$$

2° La formule $(0, 2, 0)$ ne peut aussi s'appliquer qu'à partir de $q = 6$. Il ne peut y avoir de permutations de cette espèce qu'à partir de $q = 4$.

Pour $q = 4$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec efef on peut placer abab de deux manières, soit avant un *e*, soit avant un *f*, pour obtenir deux S_4 , tandis qu'en général on ne le place que d'une seule; en outre, la tournante $N_2(0, 1, 0)$ est incomplète et ne contient que deux permutations au lieu de quatre; il faut donc multiplier par 4 le résultat que donne la formule; or elle donne $\frac{1}{48}N_4(0, 2, 0) = \frac{1}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{1}{2}$, et l'on prendra $N_4(0, 2, 0) = 48.2 = 4P_4$ trouvé directement (IV).

Pour $q = 5$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec efef on peut placer c abab c de deux manières au lieu d'une, et l'autre raison subsiste encore : il faut multiplier par 4; or la formule donne

$$\frac{1}{108}N_3(0, 2, 0) = \frac{3}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{3}{2},$$

et l'on prendra $N_5(0, 2, 0) = 100.6 = 5P_5$. On le vérifie directement; il n'y a qu'une seule variété, symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, abab c c d c d e; donc

$$N_5(0, 2, 0) = 1.2.5P_3.\frac{1}{2} = 5P_5.$$

Pour $q = 6$, on obtient

$$\frac{1}{36.5}N_6(0, 2, 0) = \frac{1}{4}.2N_4(0, 2, 0) = 2P_4,$$

d'où

$$N_6(0, 2, 0) = 12P_4.$$

On le vérifie, il ne peut exister que les deux variétés suivantes, symétriques de fraction $\frac{1}{2}$,

$$\frac{ab\ ab}{cf} \left| \frac{cf}{cf} \right| \frac{cd\ cd}{fe} \left| \frac{cf}{fe} \right|$$

et

$$N_6(0, 2, 0) = 2 \cdot 2 \cdot 6 P_6 \cdot \frac{1}{2} = 12 P_6.$$

IX. *Abaissement d'ordre du nombre $N_q(r, 0, 0)$; cas particulier.*

L'espèce $N_q(r, 0, 0)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, 0, 0)$ tournantes, et si l'on commence une des tournantes par un des $2r$ intervalles S_3 , on comptera $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$ permutations.

Si l'on enlève les extrêmes d'un des S_3 , les deux a de aba , autour de b , il peut se former un S_4 , un S_3 , ou rien :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{bc\ bc}{cb\ cb} \end{array} \right\} \text{ par les formes réciproques } \left\{ \begin{array}{l} \frac{aba\ cbc}{cbc\ aba} \end{array} \right.$$

dbd par la forme $d\ aba\ d$ (et dans ce cas il existe un S_3 complémentaire de dbd , cbc par exemple).

On multipliera par q le nombre de permutations ainsi compté relativement à a .

S'il se forme un S_4 , on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 1, 0)$; le nombre des couples de S_3 complémentaires a diminué de 1, et il s'est formé un S_4 . Chacune de ces tournantes, commencée par S_4 , donne deux permutations à l'espèce cherchée si l'on entoure de deux a l'une des extrêmes de S_4 . La part sera

$$\frac{2}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 1, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q-1} N_{q-1}(r-1, 1, 0).$$

S'il se forme un S_3 , on a l'espèce $N_{q-1}(r, 0, 0)$; le S_3 enlevé est remplacé par un autre de même médiane.

Chacune de ces tournantes, commencée par un des $2r$ intervalles S_3 , fournit $2r$ permutations à l'espèce cherchée; on entoure de deux a l'une des médianes de ces S_3 . La part sera

$$\frac{2r}{2(q-1)} N_{q-1}(r, 0, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{r}{q-1} N_{q-1}(r, 0, 0);$$

sinon, on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 0, 1)$; le nombre des couples de $2S_3^c$ a diminué de 1, et il s'est formé un S_3 distinct. Chaque tournante, commencée par le S_3 distinct, fournit une permutation à l'espèce cherchée; on entoure de deux a la lettre b isolée, semblable à la médiane du S_3 distinct. La part sera

$$\frac{1}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 0, 1).$$

Si l'on ajoute les trois parts, et qu'on multiplie par q , on obtient $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$; multipliant par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule $(r, 0, 0)$

$$\frac{r(q-1)}{q^2} N_q(r, 0, 0) = N_{q-1}(r-1, 1, 0) + r N_{q-1}(r, 0, 0) + \frac{1}{2} N_{q-1}(r-1, 0, 1).$$

Cette formule, pour $r = 1$, comprend la formule $(1, 0, 0)$, relative à l'une des espèces qui forment $C_{q,2}$

$$\frac{q-1}{q^2} N_q(1, 0, 0) = N_{q-1}(0, 1, 0) + N_{q-1}(1, 0, 0) + \frac{1}{2} N_{q-1}(0, 0, 1).$$

Elle ne peut s'appliquer à $q = 3$, on a trouvé directement (IV)

$$N_3(1, 0, 0) = 3P_3 = 18.$$

Or elle donnerait

$$\frac{2}{3} N_3(1, 0, 0) = N_2(0, 1, 0) = 2, \quad \text{d'où} \quad N_2(0, 1, 0) = 9;$$

c'est que la tournante de $N_2(0, 1, 0)$, $abab$ est incomplète à deux permutations au lieu de quatre; le résultat de la formule doit être multiplié par 2.

Pour $q = 4$, on trouve

$$\frac{3}{16} N_4(1, 0, 0) = N_3(1, 0, 0) = 3P_3,$$

d'où

$$N_4(1, 0, 0) = 4P_4 \text{ (IV).}$$

X. *Calcul direct de* $N_{2\nu}(0, 0, \nu)$, $N_{2u}(0, u, 0)$ et $N_{3r}(r, 0, 0)$.

1° Une permutation de l'espèce $N_{2\nu}(0, 0, \nu)$ peut avoir, relativement à la médiane b de l'un des ν intervalles S_3 , les quatre formes suivantes :

$$\underline{aba} \underline{fcdc} \underline{bd} \underline{efe},$$

$$\underline{ba} \underline{fcdc} \underline{bd} \underline{efe} \underline{a},$$

$$\underline{af} \underline{cdc} \underline{bd} \underline{efe} \underline{ab},$$

$$\underline{bd} \underline{efe} \underline{aba} \underline{fcdc},$$

selon que l'intervalle aba est initial, ou coupé aux extrêmes, ou que la deuxième lettre b (semblable à la médiane) commence la permutation. Si l'on suppose chaque S_3 condensé en sa médiane, on obtient une $B_{\nu,2}$, (voir le premier article, I), car la lettre isolée b , séparée de la médiane b par deux lettres au moins dans la permutation primitive, en est séparée par une lettre au moins dans la permutation résultante.

Chacune de ces $B_{\nu,2}$ contient ν des 2ν lettres distinctes d'une $N_{2\nu}$; pour reproduire les $N_{2\nu}$, il faut entourer l'une des deux lettres d'un des ν couples de lettres d'une $B_{\nu,2}$ avec un des ν autres couples qui ont été éliminés; on peut le faire de deux manières pour chacun des $\nu - 1$ couples de la $B_{\nu,2}$ qui n'a point sa lettre en tête de la permutation et de quatre manières pour l'autre couple, eu égard aux quatre formes examinées plus haut; ainsi, avec l'un de

arrangements d'espèce $A_{2^{\nu}, \nu}$ des ν couples qui ferment, on obtient, pour une des $B_{\nu, 2}$, $2^{\nu+1}$ permutations; pour tous les arrangements, on en a $2^{\nu+1} A_{2^{\nu}, \nu}$, et pour toutes les $B_{\nu, 2}$, on a la formule (2 ν)

$$N_{2^{\nu}}(0, 0, \nu) = 2^{\nu+1} A_{2^{\nu}, \nu} B_{\nu, 2}.$$

Si $\nu = 2$,

$$N_4(0, 0, 2) = 2^3 A_{4, 2} B_{2, 2} = 2^3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8 P_4,$$

comme on l'a vérifié (IV).

Si $\nu = 3$,

$$N_8(0, 0, 3) = 2^4 A_{8, 3} B_{3, 2} = 2^4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 P_3 = 64 P_6.$$

2° Soit, pour $u = 5$, une des tournantes de l'espèce $N_{2u}(0, u, 0)$

$$\underline{abab} \underline{cdcd} \underline{efef} \underline{ghgh} \underline{ikik}.$$

Il n'y a que cette variété, symétrique de fraction $\frac{1}{u}$; donc

$$N_{2u}(0, u, 0) = \frac{1}{u} 4u P_{2u}, \text{ et l'on a la formule (2 } u)$$

$$N_{2u}(0, u, 0) = 4 P_{2u}$$

et, si $u = 3$,

$$N_6(0, 3, 0) = 4 P_6;$$

3° Soit, pour $r = 3$, une des tournantes de l'espèce $N_{3r}(r, 0, 0)$

$$\underline{aba} \underline{ccc} \underline{ded} \underline{flf} \underline{gbg} \underline{ihi}.$$

Si l'on condense chaque S_3 en une de ses lettres extrêmes, on obtient

$$acdfgi,$$

une des permutations de l'espèce $A_{3r, 2r}$, ou l'un des arrangements de $3r$ lettres distinctes, prises $2r$ à $2r$.

Pour revenir des $A_{3r, 2r}$ aux N_{3r} , il faut doubler chacune des $2r$ lettres distinctes d'une $A_{3r, 2r}$ et intercaler une des r autres lettres distinctes entre chacun des binaires ainsi formés. Ces r lettres, rangées dans un des ordres

possibles, forment une permutation d'espèce P_r : la première lettre de cette P_r occupant la première place vacante dans la permutation $A_{3r,2r}$ binarisée, sa semblable occupe une des $2r - 1$ autres places; la deuxième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r - 3$ autres places; la troisième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r - 5$ autres places, et ainsi de suite : la dernière lettre distincte et sa semblable occupent les deux seules places restées vacantes. Pour chacune des $A_{3r,2r}$, on obtient

$$1.3.5 \dots (2r-1) P_r A_{3r,2r} = 1.3.5 \dots (2r-1) P_{3r};$$

mais, comme le premier intervalle qui commence la permutation peut la commencer par l'une de ses trois lettres, il faut multiplier par 3 le nombre précédent, et l'on a la formule (3r)

$$N_{3r}(r, 0, 0) = 3.1.3.5 \dots (2r-1) P_{3r},$$

$$\text{Pour } r = 1 \dots \dots \dots N_3(1, 0, 0) = 3 P_3 \quad (\text{IV}),$$

$$\text{Pour } r = 2 \dots \dots \dots N_6(2, 0, 0) = 9 P_6.$$

XI. *Calculs depuis $q = 5$ jusqu'à $q = 7$.*

1° Décomposition des $B_{5,2}$, on a trouvé $B_{5,2} = 293 P_5$.

Formule.

$C_{q,2} \dots \dots \dots$	$C_{5,2} = 68 P_5$
$(0, 0, 1) \dots \dots \dots$	$N_5(0, 0, 1) = 100$
$(0, 0, 2) \dots \dots \dots$	$N_5(0, 0, 2) = 60$
$(0, 1, 0)$ (<i>voir VIII</i>) $\dots \dots \dots$	$N_5(0, 1, 0) = 10$
$(0, 1, 1) \dots \dots \dots$	$N_5(0, 1, 1) = 20$
$(0, 2, 0)$ (<i>voir VIII</i>) $\dots \dots \dots$	$N_5(0, 2, 0) = 5$
$(1, 0, 0) \dots \dots \dots$	$N_5(1, 0, 0) = 10$
$(r, 0, r)$ pour $r = 1, r = 1$ et $q = 5 \dots$	$N_5(1, 0, 1) = 10$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1, u = 1$ et $q = 5 \dots$	$N_5(1, 1, 0) = 10$

On vérifie. $\dots \dots \dots 293 P_5$

2^o Décomposition des $B_{6,2}$; on a trouvé $B_{6,2} = 3326 P_6$.

Formule.

$C_{q,2}$	$C_{6,2} = 837 P_6$
$(0, 0, 1)$	$N_6(0, 0, 1) = 1200$
$(0, 0, 2)$	$N_6(0, 0, 2) = 624$
$(2, v)$	$N_6(0, 0, 3) = 64$
$(0, 1, 0)$	$N_6(0, 1, 0) = 120$
$(0, 1, 1)$	$N_6(0, 1, 1) = 168$
$(0, u, v)$ pour $u = 1, v = 2$ et $q = 6$.	$N_6(0, 1, 2) = 48$
$(0, 2, 0)$	$N_6(0, 2, 0) = 12$
$(0, u, v)$ pour $u = 2, v = 1$ et $q = 6$..	$N_6(0, 2, 1) = 12$
$(2u)$	$N_6(0, 3, 0) = 4$
$(1, 0, 0)$	$N_6(1, 0, 0) = 84$
$(r, 0, v)$ pour $r = 1, v = 1$ et $q = 6$.	$N_6(1, 0, 1) = 108$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1, u = 1$ et $q = 6$...	$N_6(1, 1, 0) = 36$
$(3r)$	$N_6(2, 0, 0) = 9$

On vérifie..... $3326 P_6$

3^o Décomposition des $B_{7,2}$; on a trouvé $B_{7,2} = 44189 P_7$.

Formule.

$C_{q,2}$	$C_{7,2} = 11863 P_7$
$(0, 0, 1)$	$N_7(0, 0, 1) = 16198$
$(0, 0, 2)$	$N_7(0, 0, 2) = 8176$
$(0, 0, 3)$	$N_7(0, 0, 3) = 1400$
$(0, 1, 0)$	$N_7(0, 1, 0) = 1386$
$(0, 1, 1)$	$N_7(0, 1, 1) = 1764$
$(0, u, v)$ pour $u = 1, v = 2$ et $q = 7$...	$N_7(0, 1, 2) = 672$
$(0, 2, 0)$	$N_7(0, 2, 0) = 98$
$(0, u, v)$ pour $u = 2, v = 1$ et $q = 7$...	$N_7(0, 2, 1) = 126$
$(0, u, 0)$ pour $u = 3$ et $q = 7$	$N_7(0, 3, 0) = 14$
$(1, 0, 0)$	$N_7(1, 0, 0) = 938$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1, v = 1$ et $q = 7$...	$N_7(1, 0, 1) = 1050$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1$ et $v = 2$	$N_7(1, 0, 2) = 168$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1, u = 1$ et $q = 7$...	$N_7(1, 1, 0) = 168$
(r, u, v) pour $r = 1, u = 1, v = 1$ et $q = 7$.	$N_7(1, 1, 1) = 84$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1, u = 2$ et $q = 7$...	$N_7(1, 2, 0) = 21$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 2$ et $q = 7$	$N_7(2, 0, 0) = 63$

On vérifie..... $44189 P_7$