

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 332-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__332_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 142

(voir 1^{re} série, t. VI, p. 134);

PAR M. H. BROCARD.

Un cône droit du second degré étant coupé par un plan perpendiculaire à un plan principal, concevons une sphère concentrique au cône et tangente au plan sécant: le plan tangent à cette sphère, mené perpendiculairement à l'axe du cône, coupe le plan principal suivant une droite dont la partie interceptée dans le cône est égale au paramètre de la section conique.

(JACQUES BERNOULLI.)

Soient SA, SB (*) les deux génératrices du cône situées dans le plan principal considéré; AB la trace du plan sécant perpendiculaire à ce plan principal; P la projection de S sur AB; la droite SP sera le rayon de la sphère. Soit SI le rabattement de SP sur l'axe du cône; par le point I menons, dans le plan principal, la droite HJK perpendiculaire à SI, et limitée aux génératrices

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

SA, SB. Il s'agit de démontrer que HIK est le paramètre de la conique d'intersection du cône et du plan AB.

En effet, si l'on désigne par α l'angle SAB; par 2ϵ celui du cône, et par d la distance SA, la conique rapportée à l'axe ABX, et à une perpendiculaire AY située dans le plan sécant, a pour équation

$$y^2 = \frac{2d \sin \alpha \sin \epsilon}{\cos \epsilon} x - \frac{\sin \alpha \sin (\alpha + 2\epsilon)}{\cos^2 \epsilon} x^2,$$

où $\frac{2d \sin \alpha \sin \epsilon}{\cos \epsilon}$ représente le paramètre de la conique. Or, dans le triangle rectangle SIK, on a $IK = IS \tan \epsilon = SP \tan \epsilon = d \sin \alpha \tan \epsilon$. La proposition est donc établie.

Cette remarque simple mérite d'être signalée dans les cours de Mathématiques spéciales. Elle conduit à une construction directe du paramètre, lorsqu'on applique la méthode de *Dandelin*.

Question 1167

(voir 2^e série, t. XIV, p. 192);

PAR M. F. STORDEUR,

Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Démontrer la formule

$$\frac{4}{\pi} = \tan 45^\circ + \frac{1}{2} \tan \frac{45^\circ}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{45^\circ}{4} + \dots$$

(L. BOURGUET.)

Je circonscris au cercle, de rayon égal à l'unité, des polygones réguliers de 4, 8, ..., 2^{n+2} côtés; si $a_0, a_1, \dots, a_n$; $p_0, p_1, \dots, p_n$ désignent respectivement les valeurs des côtés et des périmètres de ces polygones, on aura

$$a_0 = 2 \tan 45^\circ, \dots, a_n = 2 \tan \frac{45^\circ}{2^n};$$

$$p_0 = 2^3 \tan 45^\circ, \dots, p_n = 2^{n+3} \tan \frac{45^\circ}{2^n}.$$

Le nombre π est, comme on sait, la limite de $\frac{P_n}{2}$ quand n croît indéfiniment; il en résulte

$$\frac{4}{\pi} = \lim \frac{8}{P_n} = \lim \frac{1}{2^n \tan \frac{45^\circ}{2^n}}.$$

Cela posé, la formule connue

$$\frac{1}{2 \tan \frac{a}{2}} = \frac{1}{\tan a} + \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2}$$

donne successivement

$$\frac{1}{2 \tan \frac{45^\circ}{2}} = \frac{1}{\tan 45^\circ} + \frac{1}{2} \tan \frac{45^\circ}{2},$$

$$\frac{1}{2^2 \tan \frac{45^\circ}{2^2}} = \frac{1}{2 \tan \frac{45^\circ}{2}} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{45^\circ}{2^2},$$

.....,

$$\frac{1}{2^n \tan \frac{45^\circ}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \tan \frac{45^\circ}{2^{n-1}}} + \frac{1}{2^n} \tan \frac{45^\circ}{2^n};$$

additionnant ces n équations, et observant que

$$\frac{1}{\tan 45^\circ} = \tan 45^\circ,$$

il vient

$$\frac{1}{2^n \tan \frac{45^\circ}{2^n}} = \tan 45^\circ + \frac{1}{2} \tan \frac{45^\circ}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{45^\circ}{2^n}.$$

En faisant croître n indéfiniment, le premier membre de cette dernière équation tend vers $\frac{4}{\pi}$, et le second tend vers la série convergente de l'énoncé; la proposition est donc démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Meyl, ancien officier d'Artillerie, à la Haye; L.-P. de Cuerne, à Liège; Edmond de Lamaze, élève des Dominicains, à l'école de Sorrèze; Brocard; Moret-Blanc; Chadu; Moreau; de Virieu.

Question 1168

(voir 2^e série, t. XIII, p. 192);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$(1) \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

En prenant x pour base d'un système de numération, nous aurons $y^2 = 11111$. Cherchons donc, pour trouver la valeur de y , à extraire la racine carrée de ce nombre par le procédé ordinaire :

$$\begin{array}{r|l} 1.11\ 11 & 10a \\ 1.1.11 & 20a \\ \hline 2a.a^2 & a \\ \hline 0\ 0 & \end{array}$$

Le premier chiffre de la racine est 1; le second est 0, puisque 1 ne peut contenir 2; quant au troisième, en le désignant par a , il faut, pour que l'opération se fasse exactement, que l'on ait

$$a^2 = 11 \quad \text{et} \quad 2a = 11,$$

et par suite

$$a^2 = 2a = x + 1, \quad \text{d'où} \quad a = 2 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

D'ailleurs $x = 1$ ne satisfait pas à l'équation proposée, donc la seule solution en nombres entiers positifs a lieu pour $x = 3$, et elle donne $y = 3^2 + 2 = 11$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard et Moret-Blanc.