

A. PICART

Discussion algébrique de l'équation en λ

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 31-37

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__31_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISCUSSION ALGÈBRE DE L'ÉQUATION EN λ ;

PAR M. A. PICART.

Soient

$$(1) \quad S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(2) \quad S' = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations de deux coniques;

$$(3) \quad S - \lambda S' = 0$$

l'équation générale des coniques qui passent par leurs points d'intersection.

En exprimant que cette dernière équation représente deux droites, on obtient la condition

$$(4) \quad \begin{vmatrix} A - \lambda A' & B - \lambda B' & D - \lambda D' \\ B - \lambda B' & C - \lambda C' & E - \lambda E' \\ D - \lambda D' & E - \lambda E' & F - \lambda F' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation en λ .

Pour qu'à une valeur réelle de λ corresponde un système de sécantes communes réelles, il faut que cette valeur de λ rende positive la quantité

$$(B - \lambda B')^2 - (A - \lambda A')(C - \lambda C'),$$

que nous appellerons Δ , ou bien l'annule en rendant

(*) *Crelle*, p. 110, § 20.

positive la quantité

$$(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(F - \lambda F'),$$

que nous désignerons par Δ_1 .

Or l'équation (4) peut s'écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F - \lambda F') [(A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2] \\ - (A - \lambda A')(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(D - \lambda D')^2 \\ + 2(B - \lambda B')(D - \lambda D')(E - \lambda E') = 0. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord $A'C' - B'^2 > 0$; l'équation du second degré

$$(6) \quad (A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2 = 0,$$

dont le terme en λ^2 a pour coefficient $A'C' - B'^2$, a ses racines réelles; car, pour $\lambda = \infty$, son premier membre est positif, et, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$ ou $\frac{C'}{C}$, il est négatif. Nous

excluons le cas où l'on aurait $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, parce qu'alors on voit immédiatement que, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$, l'équa-

tion (3) représente deux droites réelles dont une à l'infini. Désignons par α et β ces deux racines; si $\frac{A}{A'} < \frac{C}{C'}$, l'une

est plus petite que $\frac{A}{A'}$, l'autre plus grande que $\frac{C}{C'}$; soit

$\alpha < \frac{A}{A'}$, $\beta > \frac{C}{C'}$. Substituons successivement α et β à

la place de λ dans le premier membre de l'équation (5), ce premier membre devient, pour $\lambda = \alpha$,

$$\begin{aligned} & - (A - \alpha A')(E - \alpha E')^2 - (C - \alpha C')(D - \alpha D')^2 \\ & + 2(E - \alpha E')(D - \alpha D')\sqrt{(A - \alpha A')(C - \alpha C')}; \end{aligned}$$

mais

$$\alpha < \frac{A}{A'} < \frac{C}{C'};$$

d'où l'on tire, puisqu'on peut toujours supposer $A' > 0$,
par suite $C' > 0$, en vertu de l'hypothèse $A'C' - B'^2 > 0$,

$$A - \alpha A' > 0, \quad C - \alpha C' > 0;$$

donc le résultat de la substitution est

$$- [(E - \alpha E') \sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D') \sqrt{C - \alpha C'}]^2,$$

c'est-à-dire négatif.

Pour $\lambda = \beta$, le résultat de la substitution est, puisque
 $\beta > \frac{C}{C'} > \frac{A}{A'}$, et, par suite, $A - \beta A' < 0$, $C - \beta C' < 0$,

$$+ [(E - \beta E') \sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D') \sqrt{\beta C' - C}]^2,$$

c'est-à-dire positif. Donc l'équation (5) a une ou trois
racines réelles comprises entre α et β . Soit λ' l'une de
ces racines; cette valeur, mise à la place de λ dans le
premier membre de l'équation (6), le rend négatif, puis-
qu'elle est comprise entre ses deux racines; donc, pour
 $\lambda = \lambda'$, la quantité Δ est positive.

Considérons en second lieu le cas où

$$A'C' - B'^2 < 0.$$

Les racines de l'équation (6) peuvent être réelles ou
imaginaires. Supposons-les d'abord réelles; soient α et β
ces deux racines : elles sont toutes deux ou $< \frac{A}{A'}$, ou
comprises entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$, ou $> \frac{C}{C'}$. Si on les substitue à
la place de λ dans le premier membre de l'équation (5),
comme $A - \alpha A'$ et $C - \alpha C'$ sont de même signe, ainsi
que $A - \beta A'$ et $C - \beta C'$, puisque leur produit est positif,
on obtient ou

$$\begin{aligned} & - [(E - \alpha E') \sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D') \sqrt{C - \alpha C'}]^2, \\ & - [(E - \beta E') \sqrt{A - \beta A'} - (D - \beta D') \sqrt{C - \beta C'}]^2, \end{aligned}$$

ou

$$+ [(E - \alpha E') \sqrt{\alpha A' - A} + (D - \alpha D') \sqrt{\alpha C' - C}]^2, \\ + [(E - \beta E') \sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D') \sqrt{\beta C' - C}]^2,$$

c'est-à-dire toujours deux résultats de même signe. Donc l'équation en λ a une ou trois racines réelles en dehors de l'intervalle compris entre α et β ; mais toute valeur de λ non comprise entre α et β fait prendre au premier membre de l'équation (6) le signe —; donc, encore dans ce cas, il y a au moins une racine de l'équation en λ qui rend positive la quantité Δ .

Si nous supposons maintenant les racines de l'équation (6) imaginaires, son premier membre prend toujours le signe — pour toute valeur de λ ; par conséquent, toutes les racines réelles de l'équation en λ rendront positive la quantité Δ .

Il nous reste encore à faire voir que, quand l'une des racines réelles de l'équation en λ annule Δ , s'il n'y en a pas d'autre qui rende Δ positif, elle rend positive ou nulle la quantité Δ_1 , c'est-à-dire que, pour cette valeur de λ , l'équation (3) représente deux droites réelles parallèles distinctes ou une droite double réelle. En effet, l'équation en λ peut s'écrire

$$(B - \lambda B')(E - \lambda E') - (C - \lambda C')(D - \lambda D')^2 \\ - [(B - \lambda B')^2 - (A - \lambda A')(C - \lambda C')] \\ \times [(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(F - \lambda F')] = 0,$$

ce qui montre que Δ et Δ_1 , quand ils ne sont pas nuls, sont de même signe. Or, si la racine réelle λ' qui rend généralement Δ positif l'annule, on peut supposer que les coefficients $A, A', B, B', C, C', \dots$ soient altérés de quantités infiniment petites qui ne feront que modifier infiniment peu les deux courbes; la racine λ' deviendra

$\lambda' + \delta\lambda'$; elle cessera d'annuler la quantité Δ pour la rendre positive; par suite, elle rendra positive la quantité Δ_1 ; mais la nouvelle valeur de Δ_1 diffère infiniment peu de la première; donc celle-ci était positive pour $\lambda = \lambda'$, à moins qu'elle ne fût nulle en même temps que Δ .

Sans vouloir entrer dans le détail des cas particuliers, il nous faut pourtant examiner encore spécialement le cas où $A'C' - B'^2 = 0$.

Alors l'équation (6) se réduit à

$$(6') \quad (2BB' - AC' - CA')\lambda + AC - B^2 = 0;$$

l'une de ses racines est infinie. Désignons l'autre par β . si $2BB' - AC' - CA' > 0$, cette racine est plus grande que $\frac{C'}{C}$, et, si $2BB' - AC' - CA' < 0$, elle est plus petite que $\frac{A}{A'}$. En effet, dans le premier cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} > \frac{C}{C'};$$

car, si l'on chasse les dénominateurs, cette inégalité devient, en tenant compte de l'hypothèse $A'C' - B'^2 = 0$,

$$(B\sqrt{C'} - C\sqrt{A'})^2 > 0;$$

dans le second cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} < \frac{A}{A'};$$

car, après avoir chassé les dénominateurs, on obtient

$$(B\sqrt{A'} - A\sqrt{C'})^2 > 0.$$

Mais, dans le premier cas, si l'on substitue β à λ dans l'équation (5), son premier membre devient

$$+ [(E - \beta E') \sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D') \sqrt{\beta C' - C}]^2,$$

3.

c'est-à-dire positif; dans le second, il devient

$$- [(E - \beta E') \sqrt{A - \beta A'} - (D - \beta D') \sqrt{C - \beta C'}]^2,$$

c'est-à-dire négatif. D'ailleurs, si l'on substitue $+\infty$ à λ , on trouve le signe du discriminant

$$A'E'^2 + C'D'^2 - 2B'D'E' + F(B'^2 - A'C'),$$

qui se réduit ici à

$$A'E'^2 + C'D'^2 - 2B'DE'$$

ou

$$(E'\sqrt{A'} - D'\sqrt{C'})^2,$$

c'est à-dire le signe $+$. Donc l'équation en λ a une ou trois racines réelles inférieures à β dans le premier cas, et supérieures à β dans le second; mais, dans le premier cas, tout nombre inférieur à β , mis à la place de λ , rend le premier membre de l'équation (6') négatif; dans le second, la même chose a lieu pour tout nombre supérieur à β ; donc il y a au moins une racine réelle de l'équation en λ qui rend positive la quantité Δ , réduite ici à

$$- (2BB' - AC' - CA')\lambda - AC + B^2.$$

Si, en même temps que

$$A'C' - B'^2 = 0,$$

on a

$$2BB' - AC' - CA' = 0,$$

on en tire

$$B^2 = \frac{(AC' + CA')^2}{4B'^2} = \frac{(AC' + CA')^2}{4A'C'} = \frac{AC}{2} + \frac{A^2C'^2 + C^2A'^2}{4A'C'}.$$

Or

$$\frac{A^2C'^2 + C^2A'^2}{4A'C'} > \frac{AC}{2},$$

car cette inégalité revient à

$$(AC' - CA')^2 > 0;$$

(37)

donc $B^2 - AC$ est positif : la quantité Δ est alors constante et positive.