Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'agrégation (année 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 308-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__308_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1874.)

Question de Mathématiques spéciales;

PAR M. E. FIOT,
Professeur de Mathématiques au lycée de Sens.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales; on imagine une conique quelconque c, doublement tangente à chacune des coniques données. Trouver et discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique c.

Principes sur les coniques bitangentes à une troisième.

Lorsque deux coniques sont bitangentes à une troisième, les cordes de contact passent par le point de concours des sécantes communes à ces deux coniques, correspondant aux cordes de contact.

Si les sécantes sont parallèles, les cordes de contact leur sont respectivement parallèles.

C'est un théorème bien connu, résultant de ce que toute conique bitangente à une conique $s = 0$ a pour équation

$$s - k\alpha^2 = 0.$$

Distinction a priori *des différentes parties du lieu cherché.*

L'ellipse et l'hyperbole homofocales données se coupent en quatre points A, B, C, D situés aux sommets d'un rectangle concentrique à ces coniques. Des trois couples de sécantes communes, il y en a un, (AC, BD), concentrique aux deux courbes; les deux autres, (AB, CD), (AD, BC), sont respectivement parallèles aux axes OX, OY : il en est de même, dans ces trois cas, des cordes de contact.

Premier cas. — *Sécantes communes concentriques.*

Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole homofocales sont

$$s = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad s' = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

en supposant $a^2 > \lambda > b^2$.

Soient $y - mx = 0$, $y - m'x = 0$ les équations des cordes de contact; l'équation de la conique c pourra se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$c = s - k(y - mx)^2 = 0, \quad c = s' - k'(y - m'x)^2 = 0.$$

Exprimons que ces deux équations représentent la même conique : nous aurons les relations

$$\frac{1}{a^2} - km^2 = \frac{1}{a^2 - \lambda} - k'm'^2, \quad \frac{1}{b^2} - k = \frac{1}{b^2 - \lambda} - k',$$

$$km = k'm'.$$

En éliminant k et k' entre ces trois équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on obtient la relation

$$mm' = -\frac{b^2(b^2 - \lambda)}{a^2(a^2 - \lambda)},$$

entre les coefficients angulaires m, m' des deux cordes de contact.

Recherche des équations des tangentes. — Le diamètre de l'ellipse, conjugué de la droite $y - mx = 0$, a pour coefficient angulaire $-\frac{b^2}{a^2 m}$; par suite, les tangentes à l'ellipse, parallèles à ce diamètre, ont pour équation

$$(1) \qquad y = -\frac{b^2 x}{a^2 m} \pm \frac{b\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{am}.$$

On trouve de même que les tangentes à l'hyperbole, conjuguées de la droite $y - m'x = 0$, ont pour équation

$$(2) \quad y = -\frac{(b^2 - \lambda)}{(a^2 - \lambda) m'} x \pm \frac{\sqrt{b^2 - \lambda}\sqrt{(a^2 - \lambda) m'^2 + b^2 - \lambda}}{m'\sqrt{a^2 - \lambda}}.$$

On aura l'équation du lieu cherché en éliminant m, m' entre les équations (1), (2) et

$$mm' = -\frac{b^2(b^2 - \lambda)}{a^2(a^2 - \lambda)}.$$

Élimination de m *et* m'. — Je commence par rendre rationnelles les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(a^2 m y + b^2 x)^2 = a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2),$$

$$[(a^2 - \lambda) m' y + (b^2 - \lambda) x]^2$$
$$= (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)[(a^2 - \lambda) m'^2 + (b^2 - \lambda)];$$

puis, dans cette dernière équation, je remplace m' par sa valeur

$$m' = -\frac{b^2(b^2-\lambda)}{a^2(a^2-\lambda)m};$$

après réduction, on trouve

$$(a^2mx - b^2y)^2 = a^4m^2(a^2-\lambda) + b^4(b^2-\lambda).$$

On a donc à éliminer m entre les équations

$$(a^2my + b^2x)^2 = a^2b^2(a^2m^2 + b^2),$$
$$(a^2mx - b^2y)^2 = a^4m^2(a^2-\lambda) + b^4(b^2-\lambda);$$

en les additionnant membre à membre, il vient

$$(a^4m^2 + b^4)(x^2+y^2) = (a^4m^2 + b^4)(a^2+b^2-\lambda),$$

équation qui se dédouble en deux autres :

$$a^4m^2 + b^4 = 0 \quad \text{et} \quad x^2+y^2 = a^2+b^2-\lambda.$$

Si l'on ne tient pas compte des imaginaires, le lieu est, dans le premier cas, le cercle représenté par

$$x^2+y^2 = a^2+b^2-\lambda \quad (*);$$

on doit avoir $\lambda < a^2$ donc : $a^2+b^2-\lambda$ est une quantité toujours positive, et, par conséquent, le cercle est toujours réel.

Deuxième cas. — *Sécantes communes parallèles à l'axe* OX; *cordes de contact aussi parallèles à* OX.

Soient $y-h=0$, $y-h'=0$ les équations des cordes

(*) En remplaçant dans l'équation $s'-ks=0$ l'indeterminée k par

$$\frac{a^2b^2}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)},$$

il vient

$$x^2+y^2-(a^2+b^2-\lambda)=0;$$

donc le cercle que cette équation représente passe par les quatre points A, B, C, D, communs aux deux coniques données. (G.)

de contact, l'équation de la conique c pourra s'écrire sous l'une ou l'autre des formes

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-k(y-h)^2=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)-k'(y-h')^2=0;$$

il en résulte

$$\frac{a^2-\lambda}{a^2}=\frac{(b^2-\lambda)(1-b^2k)}{b^2[1-k'(b^2-\lambda)]}=\frac{kh}{k'h'}=\frac{1+kh^2}{1+k'h'^2};$$

ces trois relations peuvent s'écrire

$$a^2kh-(a^2-\lambda)k'h'=0,\quad a^2kh^2-(a^2-\lambda)k'h'^2+\lambda=0,$$
$$b^2(a-\lambda)[1-k'(b^2-\lambda)]=a^2(b^2-\lambda)(1-kb^2).$$

Les deux premières donnent k et k'; en substituant dans la troisième, on obtient la relation qui lie les paramètres h, h'. On trouve ainsi, sans difficulté,

$$(b^2-a^2)hh'=b^2(b^2-\lambda).$$

Recherche des tangentes correspondant aux cordes h, h'. — Les coordonnées du pôle de la droite $y-h=0$, relativement à l'ellipse, sont

$$x=0,\quad y=\frac{b^2}{h}.$$

Il s'ensuit que le système des tangentes menées de ce point à l'ellipse a pour équation

$$(3)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)(b^2-h^2)-(y-h)^2=0.$$

De même, les coordonnées du pôle de la droite $y-h'=0$, par rapport à l'hyperbole, sont

$$x=0,\quad y=\frac{b^2-\lambda}{h'}.$$

Le système des deux tangentes issues de ce point a pour équation

$$(4)\quad \left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)(b^2-\lambda-h'^2)-(y-h')^2=0.$$

En éliminant h et h' entre les équations (3) et (4) et la relation

$$(b^2-a^2)hh'=b^2(b^2-\lambda),$$

on aura l'équation du lieu cherché.

Élimination. — Je commence par éliminer h' entre les deux dernières équations

$$h'=\frac{b^2(b^2-\lambda)}{(b^2-a^2)h},$$

d'où

$$\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)\left[b^2-\lambda-\frac{b^4(b^2-\lambda)^2}{h^2(b^2-a^2)^2}\right]$$
$$-\left[y-\frac{b^2(b^2-\lambda)^2}{h(b^2-a^2)}\right]^2=0.$$

En simplifiant, on trouve que cette équation, ordonnée par rapport à h, devient

$$(5)\quad \begin{cases} (b^2-a^2)^2[x^2-(a^2-\lambda)]h^2+2b^2y(b^2-a^2)(a^2-\lambda)h \\ \qquad -b^4[x^2(b^2-\lambda)+y^2(a^2-\lambda)]=0. \end{cases}$$

En ordonnant de même l'équation (3), on a

$$(6)\quad (a^2y^2+b^2x^2)h^2-2a^2b^2yh-b^4(x^2-a^2)=0.$$

L'élimination de la première puissance de h entre les deux équations (5) et (6) donne

$$[(b^2-a^2)^2(x^2-a^2+\lambda)a^2+(a^2y^2+b^2x^2)(b^2-a^2)(a^2-\lambda)]h^2$$
$$-a^2b^4[x^2(b^2-\lambda)+y^2(a^2-\lambda)]$$
$$-b^4(x^2-a^2)(b^2-a^2)(a^2-\lambda)=0$$

ou, en simplifiant,

$$h^2(b^2-a^2)\left[x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda)\right.$$
$$\left.-a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)\right]$$
$$-b^4\left[x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda)\right.$$
$$\left.-a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)\right]=0.$$

On aperçoit le facteur $h^2(b^2-a^2)-b^4$, lequel est toujours négatif, puisque $b^2-a^2<0$; si l'on supprime ce facteur, il reste l'équation de la conique

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda)\\ &\qquad -a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Tel est le lieu relatif au second cas.

TROISIÈME CAS. — *Sécantes et cordes de contact parallèles à l'axe* OY.

L'équation du lieu cherché se déduit de l'équation (7) en changeant x en y et a en b; d'où la nouvelle conique

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &y^2(2a^2b^2-b^4-a^2\lambda)+b^2x^2(b^2-\lambda)\\ &\qquad -b^2(b^2-\lambda)(a^2-b^2)=0\ (*).\end{aligned}\right.$$

Discussion relative aux deux coniques (7) et (8). — Posons

$$2a^2b^2-a^4-b^2\lambda=\mathrm{A},\quad a^2(a^2-\lambda)=\mathrm{B},\quad a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)=\mathrm{C};$$
$$b^2(b^2-\lambda)=\mathrm{A}',\quad 2a^2b^2-b^4-a^2\lambda=\mathrm{B}',\quad b^2(b^2-\lambda)(a^2-b^2)=\mathrm{C}';$$

(*) Les équations (7) et (8) s'obtiennent en remplaçant dans l'équation $s'-ks=0$ l'indéterminée k, successivement par $\dfrac{b^2(\lambda-a^2)}{a^2(\lambda-b^2)}$ et $\dfrac{a^2(\lambda-b^2)}{b^2(\lambda-a^2)}$, ce qui prouve que les coniques (7) et (8) passent chacune par les quatre points d'intersection des coniques données s et s'. En outre, les coordonnées $x=0$, $y=\pm\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{-1}$ des foyers imaginaires de l'ellipse et de l'hyperbole homofocales s et s' vérifient l'équation (7), et les coordonnees $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $y=0$ des foyers réels de ces mêmes courbes s et s' satisfont à l'équation (8). (G.)

les équations (7) et (8) des deux coniques deviendront

$$Ax^2 + By^2 = C, \quad A'x^2 + B'y^2 = C'.$$

Or les hypothèses

$$a^2 > \lambda, \quad b^2 < a^2, \quad \lambda > b^2$$

donnent

$$a^2 - \lambda > 0, \quad b^2 - a^2 < 0, \quad b^2 - \lambda < 0;$$

ainsi l'on a toujours

$$B > 0, \quad C < 0, \quad A' < 0, \quad C' < 0.$$

Toute la discussion porte sur les valeurs de A et de B', qui peuvent s'écrire

$$A = b^2\left[\frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2} - \lambda\right], \quad B' = a^2\left[\frac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2} - \lambda\right],$$

ou

$$A = b^2(\lambda' - \lambda), \quad B' = a^2(\lambda'' - \lambda),$$

en posant

$$\lambda' = \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2} \quad \text{et} \quad \lambda'' = \frac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}.$$

Il est facile de voir que l'on a $\lambda' < b^2$ et $a^2 > \lambda'' > b^2$; il en résulte d'abord que la valeur de A est toujours négative. Le signe de B' est le même que celui de la différence $\lambda'' - \lambda$ des quantités λ'' et λ, toutes deux comprises entre b^2 et a^2. Lorsque λ varie depuis b^2 jusqu'à $\lambda'' = \dfrac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}$ exclusivement, B' est positif, et, en mettant en évidence les signes des coefficients, les équations des deux coniques sont

$$-Ax^2 + By^2 = -C \quad \text{hyperbole;}$$
$$-A'x^2 + B'y^2 = -C' \quad \text{hyperbole.}$$

Si λ varie de λ'' à a^2, on a

$$B' < 0;$$

et, en mettant toujours les signes des coefficients en évidence, les équations des deux coniques sont

$$-\,\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 = -\,\mathrm{C} \quad \text{hyperbole;}$$

$$-\,\mathrm{A}'x^2 - \mathrm{B}'y^2 = -\,\mathrm{C}' \quad \text{ellipse réelle.}$$

Résumé. — Si l'on ne tient pas compte des imaginaires, le lieu se compose de trois lignes :

Un cercle réel et deux autres coniques qui sont des hyperboles quand λ est compris entre b^2 et $\dfrac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}$, et une hyperbole et une ellipse réelle si λ est compris entre $\dfrac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}$ et a^2 (*).

Note. — MM. Tourrettes et Gambey ont résolu la même question au moyen de calculs analogues à ceux qui précèdent; M. A. Fabre en a donné une solution géométrique fondée sur les propriétés projectives des figures, démontrées dans le *Traité de Poncelet*.