NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 289-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__289_0>

SIMPLES REMARQUES SUR LES RACINES ENTIÈRES DES ÉQUATIONS CUBIQUES;

Par M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

dans laquelle P et Q sont des coefficients entiers, soit fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} R &= 2P^3 + Q^2, \\ S &= 4P^3 + 27Q^2, \\ T &= 50P^3 - 27Q^2. \end{aligned}$$

Cela posé, les observations suivantes peuvent fournir sur la nature des racines, en tant que commensurables ou incommensurables, des indications utiles.

1. On sait que, dans le cas où les trois racines de la proposée sont entières, la quantité $-S$ est égale à un carré.

On peut ajouter (4) que, dans le même cas, les quantités $-R$ et $-T$ sont égales, chacune, à une somme de deux carrés.

D'après cela et un théorème connu, les racines étant entières, tout nombre qui divise l'une quelconque des quantités $-R$, $-T$, après qu'elle a été débarrassée des facteurs carrés qu'elle peut contenir, est une somme de deux carrés premiers entre eux; d'où il suit que, s'il arrivait, par exemple, que l'une de ces quantités $-R$, $-T$, ainsi dégagée, fût divisible par 3 ou par tout autre nombre $4z+3$, qui n'est pas la somme de deux carrés, par cela seul il y aurait lieu de conclure que la proposée n'a pas trois racines entières.

2. Le nombre entier a, pris parmi les diviseurs de Q, ne peut être une racine de la proposée, si $3a^2+P$ et $3a^2+4P$ ne sont pas diviseurs de S, et si a^2+2P et $-3a^2+2P$ ne sont pas diviseurs, respectivement, de R et de T. C'est ce qui ressort facilement des relations qui vont suivre, par lesquelles est exprimée la composition des quantités S, R, T.

3. Pour que la proposée ait toutes ses racines entières, il est nécessaire que, S étant le produit de trois facteurs tels que

$$3a^2+P, \quad 3b^2+P, \quad 3c^2+P,$$

il soit en même temps le produit des trois facteurs

$$3a^2+4P, \quad 3b^2+4P, \quad 3c^2+4P,$$

et que Q^2 soit le produit des trois facteurs

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2.$$

Alors les entiers a, b, c, pris avec des signes convenables, seront les racines dont il s'agit.

En effet les conditions posées conduisent immédiatement à une équation renfermant la proposée, et ayant pour racines les nombres a, b, c, pris avec les deux signes.

On voit donc que, en ce cas, la quantité

$$S=3(3Q)^2+P(2P)^2,$$

ainsi que chacun des facteurs appartenant soit à la première, soit à la deuxième décomposition, est renfermée dans la formule

$$3z^2+Py^2,$$

où il faut observer que P est négatif. On sait d'ailleurs que chaque facteur $3a^2 + 4P$ de la deuxième décomposition est égal à un carré pris avec le signe négatif (ce qui fait qu'il en est de même pour le produit S).

4. Les conditions ci-dessus, que nous avons tirées de la décomposition de S et de Q^2 en facteurs, peuvent être remplacées, toutes ou en partie, par des conditions analogues, relatives à la décomposition d'autres quantités.

On a, par exemple,

$$\mathrm{R} = (a^2 + 2\mathrm{P})(b^2 + 2\mathrm{P})(c^2 + 2\mathrm{P}),$$
$$\mathrm{T} = (-3a^2 + 2\mathrm{P})(-3b^2 + 2\mathrm{P})(-3c^2 + 2\mathrm{P}),$$

où nous supposons toujours que a, b, c sont racines entières de la proposée. Dans la première égalité, R et ses facteurs sont compris dans la formule

$$z^2 + 2\mathrm{P}y^2;$$

dans la deuxième, T et ses facteurs sont compris dans la formule

$$-3z^2 + 2\mathrm{P}y^2.$$

De plus les égalités

$$a^2 + 2\mathrm{P} = -b^2 - c^2,$$
$$-3a^2 + 2\mathrm{P} = -(2b + c)^2 - (2c + b)^2$$

montrent que chacun de ces facteurs, pris en signe contraire, est la somme de deux carrés (ce qui fait que les produits $-\mathrm{R}$, $-\mathrm{T}$ sont eux-mêmes des sommes de deux carrés). On reconnaîtra en outre que T et ses trois facteurs, pris en signes contraires, sont aussi représentés, chacun, par une somme de trois carrés.

Inscrivons encore la relation

$$2\mathrm{P}^3 + 27\mathrm{Q}^2 = (3a^2 + 2\mathrm{P})(3b^3 + 2\mathrm{P})(3c^2 + 2\mathrm{P}),$$

qui doit subsister entre les entiers a, b, c, s'ils sont les racines de la proposée. Ici le produit et les facteurs sont compris d'abord dans la formule

$$3z^2 + 2Py^2.$$

L'égalité

$$3a^2 + 2P = (2b + c)^2 - 3b^2$$

nous fait voir ensuite que chaque facteur, pris avec son signe, est aussi renfermé dans la formule

$$u^2 - 3t^2;$$

d'où l'on peut conclure, par un théorème connu, que la même chose a lieu à l'égard du produit.

5. Il n'est pas inopportun de rappeler ici, d'après les éléments, la simplification qui consiste à ramener d'abord l'équation à n'avoir que des racines premières entre elles.

Si les racines, supposées toutes les trois entières, ont des facteurs communs, le premier membre de l'équation est nécessairement de la forme

$$x^3 + g^2Px + g^3Q,$$

g étant le plus grand commun diviseur des racines. Alors, changeant x en gx, l'équation devient

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

où les racines a, b, c sont premières entre elles, et où P est un nombre impair, et Q un nombre pair.

Il est visible, au surplus, que la transformation indiquée peut être appliquée de façon à rendre les racines premières entre elles, non pas d'une manière absolue, mais seulement par rapport à tels facteurs premiers k_1, k_2,..., k_n qu'on voudra, de façon, dis-je, à débarrasser les racines du plus grand produit $k_1^\alpha\, k_2^\beta \ldots\, k_n^\lambda$ qu'elles ont en facteur commun et où n'entrent pas tous les facteurs premiers de g.

Cette simplification partielle peut être utile quand on ne connaît pas tous les facteurs premiers des coefficients, et nous en signalerons bientôt une application importante. En attendant, on voit déjà qu'il suffira que Q soit impair, ou que, après avoir dégagé les racines du plus grand facteur 2^α qui leur est commun, P se maintienne pair, pour qu'on ait la certitude que toutes les racines de la proposée ne sont pas entières.

6. On sait que, si une racine a est entière, les deux autres le sont ou ne le sont pas, selon que la quantité $-3a^2 - 4P$ est ou non égale à un carré, et que, si cette quantité se réduit à zéro, les deux racines sont égales. On sait, en outre, que lorsque la même quantité est un carré avec le signe négatif, les deux racines en question sont des *nombres complexes entiers*, c'est-à-dire qu'elles sont représentées par l'expression $a' \pm b'\sqrt{-1}$, dans laquelle a' et b' sont entiers, auquel cas la racine

$$a = -2a'$$

ne peut être qu'un nombre pair (*).

D'après cela, et vu que la quantité mentionnée ne peut pas devenir un carré si elle se réduit à la forme $3z + 2$, on sera assuré que, lorsque toutes les racines sont réelles et que la valeur absolue de P est de la forme $3p + 2$, deux racines ne peuvent être entières. On sera assuré de même, par des considérations semblables, que, lorsqu'une seule racine est réelle, et que P est un nombre négatif

(*) *Voir*, pour les racines complexes des équations, le tome III de la 1re série, p. 41, 145 et 325.

$-(3p-2)$, ou un nombre positif $3p+2$, les deux autres racines ne sont pas exprimées par des nombres complexes entiers. C'est aussi ce qu'on peut voir en raisonnant directement sur la quantité S.

Il y a lieu d'ajouter ici que, considérées par rapport aux trois formes

$$3z, \quad 3z+1, \quad 3z+2,$$

les valeurs absolues des coefficients P, Q, au cas des trois racines entières, ne peuvent appartenir à la même forme.

7. Admettons que l'équation proposée a toutes ses racines entières, et supposons Q positif, ce qui est toujours permis.

Ce qui précède nous conduit à remarquer que cette équation, étant transformée de manière à avoir ses racines débarrassées du plus grand facteur $2^\alpha . 3^\beta$ qui peut leur être commun, se réduira nécessairement à l'une de ces trois formes

1° $\qquad x^3-(6p+1)x+6q=0,$

2° $\qquad x^3-(6p+3)x+6q+2=0,$

3° $\qquad x^3-(6p+3)x+6q+4=0,$

p et q étant des entiers positifs. C'est ce qu'on peut vérifier directement, en s'appuyant sur les égalités

$$P=-(a^2+ab+b^2),$$
$$Q=ab(a+b),$$

considérées relativement à l'équation transformée. Ainsi, toute équation cubique qui ne se ramène pas à l'une ou à l'autre de ces formes ne saurait avoir ses trois racines entières

On reconnaîtra de même que la proposée ci-dessus est toujours réductible à l'une ou à l'autre des formes

$$1^{\circ} \qquad x^3 - (4p+1)x + 4q = 0,$$
$$2^{\circ} \qquad x^3 - (4p+3)x + 4q + 2 = 0,$$

où les racines n'ont pas le nombre 2 pour facteur commun.

On assignerait semblablement les formes exclusives que comporte la même équation lorsque, l'ayant ramenée à avoir ses racines premières entre elles par rapport aux facteurs premiers 2 et k, on distingue les coefficients d'après les formes linéaires

$$2kz, \quad 2kz+1, \quad 2kz+2, \ldots, \quad 2kz+2k-1.$$

8. La remarque suivante permet quelquefois de constater qu'une équation donnée est irréductible.

On sait que, lorsque la quantité $-S$ est égale à un carré, les racines de la proposée sont réelles, et que deux quelconques d'entre elles s'expriment rationnellement en fonction de la troisième et des quantités connues.

S'il arrivait donc que $-S$ fût un carré, et que l'une des indications précédentes nous fît reconnaître que toutes les racines ne peuvent être entières, il s'ensuivrait de nécessité qu'elles sont toutes incommensurables.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les équations de la forme

$$x^3 - 3(p^2+p+1)x + (2p+1)(p^2+p+1) = 0,$$

qui rentrent dans celles considérées par M. Lobatto dans un Mémoire inséré au tome IX de la 1re série du *Journal de Mathématiques* (*). Ici, p étant un entier de signe quelconque, la condition relative à $-S$ est satisfaite; mais

(*) Voir aussi l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

le dernier terme est un nombre impair; aucune racine par conséquent ne peut être commensurable.

9. La différence v entre deux quelconques des racines a, b, c de la proposée est donnée, comme on sait, par l'équation du sixième degré

$$v^6 + 6Pv^4 + 9P^2v^2 + S = o,$$

où toutes les valeurs de v sont entières, si celles de a, b, c le sont elles-mêmes.

Cette équation, il importe de le remarquer, se décompose dans les deux suivantes :

$$v^3 + 3Pv + \sqrt{-S} = o,$$
$$v^3 + 3Pv - \sqrt{-S} = o,$$

dont les racines sont, pour l'une, les différences

$$v' = a - b, \quad v'' = b - c, \quad v''' = c - a,$$

et pour l'autre, les mêmes différences prises en signes contraires, savoir

$$-v' = b - a, \quad -v'' = c - b, \quad -v''' = a - c.$$

Les valeurs distinctes de v sont donc données par l'équation cubique

$$v^3 + pv + q = o,$$

où l'on a fait, pour simplifier, $3P = p$, $-S = q^2$, et où il suffit de prendre q positif.

Lorsque q est un nombre entier, on pourra appliquer à cette équation les considérations exposées plus haut (7) à l'égard de la proposée, et l'on établira par là les corrélations de formes qui doivent subsister entre les coefficients p, q, pour qu'il y ait possibilité que les valeurs de v soient entières. Cela fera donc connaître de nouvelles conditions relatives à la rationnalité des racines

a, b, c; mais un autre résultat important se dégage incidemment de l'équation précédente, et nous ne devons pas omettre de le signaler.

Désignant par S' la quantité $4p^3 + 27q^2$, on a

$$-S' = 27^2Q^2,$$

par où est d'abord mise en lumière une particularité fort remarquable, relative à l'équation considérée. Elle consiste, comme on voit, en ce que $-S'$ est toujours un carré, lors même que, $-S$ ne l'étant pas, le terme q est irrationnel ou imaginaire.

Rappelons maintenant les relations

$$v'' = -\frac{v'}{2} - \frac{\sqrt{-S'}}{2(3v'^2 + p)},$$

$$v''' = -\frac{v'}{2} + \frac{\sqrt{-S'}}{2(3v'^2 + p)},$$

par lesquelles deux racines quelconques v'', v''' de la même équation sont exprimées en fonction de la troisième racine v' et des quantités connues.

Ces relations, devenant ici

$$v'' = -\frac{v'}{2} + \frac{9Q}{2(v'^2 + P)},$$

$$v''' = -\frac{v'}{2} - \frac{9Q}{2(v'^2 + P)},$$

nous font voir aussitôt que les différences v s'expriment rationnellement en fonction l'une de l'autre et des coefficients de l'équation en x, indépendamment de toute hypothèse sur la quantité S et la nature des racines a, b, c.

Joignant à cela la considération que les différences entre les racines demeurent les mêmes après la transformation linéaire qui ramène une équation quelconque du troisième degré à la forme de la proposée, on établira facilement ce théorème :

THÉORÈME. — *Dans toute équation du troisième degré, dont les racines sont a, b, c, les différences*

$$a - b, \quad b - c, \quad c - a$$

s'expriment toujours en fonction rationnelle l'une de l'autre et des coefficients.

Cette proposition, qui n'avait peut-être pas été remarquée, conduit à des conséquences importantes, et nous pourrons y revenir ; elle n'est d'ailleurs pas isolée. Bornons-nous en ce moment à observer que, la proposée en x ayant ses coefficients entiers, et toutes ses racines n'étant pas supposées entières, aucune racine de l'équation en v ne pourra être entière, et aucune racine, par suite de l'équation

$$V^3 + 6PV^2 + 9P^2V + S = 0,$$

dans laquelle $V = v^2$, ne pourra être un carré.

Note. — Ces *remarques*, conséquences implicites de principes et de formules bien connus, n'ont pas pour but de faciliter, dans la pratique, la recherche des racines entières des équations considérées ; mais elles peuvent être d'un usage avantageux dans l'analyse indéterminée, où l'on est souvent arrêté par la difficulté d'assigner théoriquement les conditions relatives à la rationnalité des racines des équations. Les développements qui précèdent fournissent effectivement des caractères, ou *criteria*, pour juger *a priori*, d'après la forme des coefficients et de quelques fonctions des coefficients, de la possibilité ou de l'impossibilité que certaines équations aient leurs racines entières. C'est pour cette raison, et bien que les propositions énoncées laissent subsister la difficulté théorique en son entier, qu'on a pu croire utile de les consigner ici.