

Questions proposées par le P. Pepin

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 275-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__275_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR LE P. PEPIN.

1. *Théorème.* — Si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, l'un des deux produits
18.

$ab(a^2 - b^2)$, $(a^2 - 2b^2)(a^2 - 4b^2)$ est toujours divisible par 7, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ est de l'une des formes $7l$, $7l + 1$, $7l + 2$, $7l + 4$, et le second, si cette somme est de l'une des formes $7l + 3$, $7l + 5$, $7l + 6$.

2. Théorème. — Soient a et b deux nombres entiers quelconques : l'un des deux produits

$$ab(a^2 - 3b^2)(a^2 - 4b^2) \quad \text{ou} \quad (a^2 - b^2)(a^2 - 5b^2)(a^2 - 9b^2)$$

est toujours divisible par 11, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ est de l'une des formes

$$11l + (0, 1, 3, 4, 5, 9),$$

et le second, si cette somme est de l'une des formes

$$11l + (2, 6, 7, 8, 10).$$

3. Théorème. — Soient $a, b, c, \dots$ des facteurs premiers inégaux, $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ et $\varphi(n)$ la fonction numérique qui exprime combien dans la suite $1, 2, 3, \dots, n$ il y a de nombres premiers relativement à n . Cette fonction $\varphi(n)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :

$$m = \varphi(m) + \sum a^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right) + \sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta}\right) \\ + \sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma}\right) + \dots + a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \dots$$

Soit, par exemple, $m = 3^2 5^2$, on a

$$3^2 5^2 = 225 = \varphi(225) + 5\varphi(9) + 3\varphi(25) + 15.$$

Legendre a démontré qu'aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube. On peut énoncer le théorème suivant plus général :

« Aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube

multiplié par une puissance entière quelconque d'un nombre premier de l'une des deux formes $18m + 5$, $18m + 11$, ni par un cube multiplié par une puissance de 2, ou par le double d'un nombre premier $18m + 11$, ou encore par le double du carré d'un nombre premier $18m + 5$. »