

B. NIEWENGLOWSKI

**Problème. Trouver la plus petite
corde d'une ellipse, qui soit normale
à l'une de ses extrémités**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 270-271

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__270_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME.

Trouver la plus petite corde d'une ellipse, qui soit normale à l'une de ses extrémités ;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Reims.

Ce problème a été traité par M. Ossian Bonnet (*Nouvelles Annales*, t. II, 1^{re} série, p. 421) et par M. Desbove (*Questions d'Algèbre*, p. 376). Voici une solution qui n'exige aucun artifice de calcul.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y = mx + n$$

les équations d'une ellipse et d'une sécante. En désignant par l la longueur de la corde déterminée par cette droite, on a

$$l^2 = (x' - x'')^2 (1 + m^2),$$

x' et x'' étant les abscisses des extrémités de la corde. L'équation qui donne x' et x'' étant de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$l^2 = (p^2 - 4q)(1 + m^2).$$

En remplaçant p et q par leurs valeurs, on trouve

$$l^2 = 4a^2b^2 \frac{(a^2m^2 + b^2 - n^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Si maintenant on remplace n^2 par $\frac{c^4m^2}{a^2 + b^2m^2}$, la corde sera normale, et sa longueur sera donnée par l'équation

$$l^2 = 4a^4b^4 \frac{(1 + m^2)^2}{(a^2 + b^2m^2)(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Il suffit, pour étudier les variations de l^2 , de faire croître m^2 de 0 à $+\infty$. En posant $m^2 = z$, il suffit de considérer la fonction

$$u = (1 + z)^3 (a^2 + b^2 z)^{-1} (a^2 z + b^2)^{-2},$$

dont la dérivée est, toutes réductions faites,

$$u' = \frac{c^2(1+z)^2}{(a^2 + b^2 z)^2 (a^2 z + b^2)^3} [(a^2 - 2b^2)z - (2a^2 - b^2)].$$

On a donc deux cas à distinguer :

$$1^\circ \quad a^2 - 2b^2 \leq 0 \quad \text{ou} \quad a \leq b\sqrt{2}.$$

La valeur de z étant toujours positive, on a constamment $u' < 0$; donc la corde normale va en décroissant depuis $2a$ jusqu'à $2b$;

$$2^\circ \quad a > b\sqrt{2}.$$

La dérivée u' s'annule pour $z = \frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}$ (valeur admissible puisqu'elle est positive), et en s'annulant passe du négatif au positif. Donc, le point de contact se mouvant sur l'ellipse, du sommet A au sommet B, la corde normale part de la valeur $2a$, arrive à une valeur minima égale à $3\sqrt{3} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ et croît de nouveau jusqu'à $2b$.