

H. LEMONNIER

**Déterminer le paramètre d'une section
parabolique dans un hyperboloïde
à une nappe**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 14
(1875), p. 169-171

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__169_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINER LE PARAMÈTRE D'UNE SECTION PARABOLIQUE DANS UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes; soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$$

celle du plan sécant, avec la condition

$$a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^2 \gamma^2 = 0;$$

nous supposons $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Quand la section est une ellipse ou une hyperbole, on a, pour les demi-axes d'une section centrale,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{a^2 \alpha^2}{R^2 - a^2} + \frac{b^2 \beta^2}{R^2 - b^2} - \frac{c^2 \gamma^2}{R^2 + c^2} = 0, \\ R_1^2 R_2^2 = \frac{-a^2 b^2 c^2}{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^2 \gamma^2}; \end{cases}$$

et l'on a pour la section par un plan (p)

$$\frac{R'^2}{R_1^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^2 \gamma^2} = \frac{p^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2}{c^2 \gamma^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2};$$

posons

$$q = \frac{R'^2}{R''} = \frac{R'^3}{R' R''}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} R'R'' &= R_1 R_2 \frac{p^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2}{c^2 \gamma^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2} \\ &= abc \frac{p^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2}{(c^2 \gamma^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ R'^3 &= R_1^3 \frac{(p^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(c^2 \gamma^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$q = R_1^3 \frac{(p^2 - a^2 \alpha^2 - b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{abc}.$$

De là résulte pour une section parabolique

$$q = R_1^3 \frac{p}{abc},$$

donc

$$R_1 = \left(q \frac{abc}{p} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

En portant cette valeur de R_1 dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{a^{\frac{4}{3}} \alpha^2}{(bcq)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^{\frac{4}{3}} \beta^2}{(acq)^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{4}{3}} \gamma^2}{(abq)^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à q , on trouve dans le coefficient de $q^{\frac{4}{3}}$ le facteur $a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^2 \gamma^2$ qui est nul. L'équation se réduit à

$$q^{\frac{2}{3}} [a^2 \alpha^2 (c^2 - b^2) b^2 + \beta^2 (-a^2 + c^2) + c^2 \gamma^2 (b^2 + a^2)] - (abc)^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}} = 0,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} q^{\frac{2}{3}} &= \frac{(abc)^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}}{a^2 \alpha^2 (c^2 - b^2) + b^2 \beta^2 (-a^2 + c^2) + c^2 \gamma^2 (b^2 + a^2)} \\ &= \frac{(abc)^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}}{a^4 \alpha^2 + b^4 \beta^2 + c^4 \gamma^2}, \end{aligned}$$

(171)

et

$$q = \frac{(abc)^2 p}{(a^4 \alpha^2 + b^4 \beta^2 + c^4 \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} :$$

c'est la valeur du demi-paramètre.