

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 88-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__88_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS
D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1873.**

Étant donnés une ellipse A et un point P dans son plan, de ce point P on mène des normales à l'ellipse A et l'on considère la conique B qui passe par le point P et les pieds des quatre normales :

1° Trouver les coordonnées des centres de cette conique B et celles de ses foyers ;

2° Trouver le lieu C du centre et le lieu D des foyers de la conique B, lorsque l'ellipse A varie de manière que ses foyers restent fixes ;

3° Trouver le lieu des points d'intersection du lieu D et de la droite OP, lorsque le point P décrit un cercle de rayon donné R^2 , et ayant pour centre le centre O de l'ellipse A.

1° Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse A et

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

celles du point P. On sait que la conique B a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

et que, l'équation générale d'une conique étant

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

les coordonnées du centre satisfont aux équations

$$(1) \quad \frac{1}{2}f'_x = 0, \quad \frac{1}{2}f'_y = 0,$$

et celles des foyers aux suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} (\frac{1}{2}f'_x)^2 - (\frac{1}{2}f'_y)^2 = (A - C)f, \\ (\frac{1}{2}f'_x)(\frac{1}{2}f'_y) = Bf. \end{cases}$$

En appliquant les formules (1), on trouve, pour déterminer le centre,

$$c^2y + b^2\beta = 0, \quad c^2x - a^2\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a^2 \alpha}{c^2}, \quad y = \frac{b^2 \beta}{c^2}.$$

En appliquant les formules (2), on trouve, pour déterminer les foyers,

$$\begin{aligned} (c^2 y + b^2 \beta)^2 - (c^2 x - a^2 \alpha)^2 &= 0, \\ (c^2 y + b^2 \beta) (c^2 x - a^2 \alpha) &= 2c^2 (c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (c^2 y + b^2 \beta)^2 - (c^2 x - a^2 \alpha)^2 &= 0, \\ (c^2 y + b^2 \beta) (c^2 x - a^2 \alpha) + 2a^2 b^2 \alpha \beta &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations se décomposent en les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} (c^2 y + b^2 \beta) + (c^2 x - a^2 \alpha) &= 0, \\ (c^2 y + b^2 \beta) (c^2 x - a^2 \alpha) + 2a^2 b^2 \alpha \beta &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (c^2 y + b^2 \beta) - (c^2 x - a^2 \alpha) &= 0, \\ (c^2 y + b^2 \beta) (c^2 x - a^2 \alpha) + 2a^2 b^2 \alpha \beta &= 0. \end{aligned}$$

On tire du premier

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2 \alpha + ab \sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, & y_1 &= \frac{-b^2 \beta - ab \sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \\ x_2 &= \frac{a^2 \alpha - ab \sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, & y_2 &= \frac{-b^2 \beta + ab \sqrt{2\alpha\beta}}{c^2}, \end{aligned}$$

et du second

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a^2 \alpha + ab \sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, & y_3 &= \frac{-b^2 \beta + ab \sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, \\ x_4 &= \frac{a^2 \alpha - ab \sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}, & y_4 &= \frac{-b^2 \beta - ab \sqrt{-2\alpha\beta}}{c^2}. \end{aligned}$$

2° Pour avoir le lieu C du centre, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$c^2 y + b^2 \beta = 0, \quad c^2 x - a^2 \alpha = 0, \quad a^2 = b^2 + c^2;$$

il vient

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

équation d'une droite facile à construire.

Pour avoir le lieu D des foyers, on élimine a^2 et b^2 entre les équations

$$\begin{aligned} (c^2\gamma + b^2\beta) + (c^2x - a^2\alpha) &= 0, \\ (c^2\gamma + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta &= 0, \quad a^2 = b^2 + c^2; \end{aligned}$$

il vient

$$2\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\beta} - 1\right) = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2.$$

En éliminant de même a^2 et b^2 entre les équations

$$\begin{aligned} (c^2\gamma + b^2\beta) - (c^2x - a^2\alpha) &= 0, \\ (c^2\gamma + b^2\beta)(c^2x - a^2\alpha) + 2a^2b^2\alpha\beta &= 0, \quad a^2 = b^2 + c^2, \end{aligned}$$

il viendrait

$$-2\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\beta} - \frac{y}{\beta} + 1\right) = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2,$$

équations de coniques faciles à construire.

3° Pour obtenir le dernier lieu, il faut éliminer α et β entre les équations

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} &= \frac{y}{\beta}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2, \\ 2\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\beta} - 1\right) &= \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

On tire des deux premières

$$\alpha = \frac{Rx}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta = \frac{Ry}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}},$$

et, en portant dans la dernière, il vient

$$2(x^2 + y^2)^2 \mp 2R(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} + R^2xy = 0.$$

Passons aux coordonnées polaires, on a

$$4\rho^2 \mp 4R\rho + R^2 \sin 2\omega = 0,$$

ou

$$(2\rho \mp R)^2 = R^2 (\sin \omega - \cos \omega)^2,$$

ce qui donne les courbes

$$(3) \quad \begin{cases} 2\rho = \pm R (1 + \sin \omega - \cos \omega), \\ 2\rho = \pm R (1 - \sin \omega + \cos \omega). \end{cases}$$

En éliminant α et β entre les équations

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} &= \frac{y}{\beta}, & \alpha^2 + \beta^2 &= R^2, \\ -2 \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{x}{\beta} - \frac{y}{\beta} + 1 \right) &= \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 \right)^2, \end{aligned}$$

on trouverait, d'une manière analogue,

$$2(x^2 + y^2)^2 \mp 2R(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} - R^2 xy = 0,$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$(4) \quad \begin{cases} 2\rho = \pm R (1 + \sin \omega + \cos \omega), \\ 2\rho = \pm R (1 - \sin \omega - \cos \omega). \end{cases}$$

Prenons pour axes les bissectrices des angles des axes actuels, ce qui revient à changer ω en $\frac{\pi}{4} + \omega$, les équations (3) et (4) deviennent

$$2\rho = \pm R (1 \pm \sqrt{2} \sin \omega), \quad 2\rho = \pm R (1 \pm \sqrt{2} \cos \omega),$$

et il est aisé d'y reconnaître quatre limaçons de Pascal.

CH. B.

Note. — Solution analogue par M. Moret-Blanc.