NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 576-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__576_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — C'est encore une critique que je vous envoie. Elle a trait à la solution de la question nos 970 et 1028.

D'abord le résultat n'est pas exact : il faut mettre b à la place de a, et *vice versâ*, en dehors de la parenthèse ; puis ce résultat se décompose en deux facteurs, en sorte que la conique fait partie du lieu, comme il était facile de le prévoir ; puis, il n'y a pas de discussion de la courbe.

Voici une solution de la même question. Soient

$$\mathrm{o} = \mathrm{F} = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}zx + 2\mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2$$

l'équation de la conique en coordonnées homogènes, (x_1, y_1, z_1) un point du lieu, (x_2, y_2, z_2) le point de contact opposé ; on aura, pour les deux tangentes issues de (x_1, y_1, z_1),

$$(1) \qquad 4\mathrm{FF}_1 - (x\mathrm{F}'_{x_1} + \ldots)^2 = \mathrm{o},$$

et pour les deux hauteurs correspondantes

$$(2) \quad 4\mathrm{FF}_1 - (x\mathrm{F}'_{x_1} + \ldots)^2 + \lambda(x\mathrm{F}'_{x_1} + \ldots)(x\mathrm{F}'_{x_2} + \ldots =\text{'}\mathrm{o}).$$

Si, dans l'équation (1), nous changeons x en y, y en $-x$ et z en o, nous aurons deux droites parallèles aux deux droites (2). Exprimons que les coefficients sont proportionnels et l'on aura

$$\frac{4\mathrm{AF}_1 - \mathrm{F}'^2_{x_1} + \lambda \mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{x_2}}{4\mathrm{CF}_1 - \mathrm{F}'^2_{y_1}} = \frac{8\mathrm{BF}_1 - 2\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_1} + \lambda(\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_2} + \mathrm{F}'_{y_1}\mathrm{F}'_{x_2})}{-8\mathrm{BF}_1 + 2\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_1}} = \ldots$$

et de là

$$\begin{aligned}
&[4(\mathrm{A}+\mathrm{C})\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}'^2_{x_1} - \mathrm{F}'^2_{y_1}] \\
&= \frac{-\lambda[\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{x_2}(8\mathrm{BF}_1 - 2\mathrm{F}_{x_1}\mathrm{F}_{y_1}) + (4\mathrm{CF}_1 - \mathrm{F}'^2_{y_1})(\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_2} + \ldots)]}{8\mathrm{BF}_1 - 2\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_1}} \\
&= \frac{-\lambda[\mathrm{F}'_{y_1}\mathrm{F}'_{y_2}(8\mathrm{BF}_1 - 2\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_1}) + (4\mathrm{AF}_1 - \mathrm{F}'^2_{x_1})(\mathrm{F}'_{r_1}\mathrm{F}'_{y_2} + \mathrm{F}'_{y_1}\mathrm{F}'_{x_2})]}{8\mathrm{BF}_1 - 2\mathrm{F}'_{x_1}\mathrm{F}'_{y_1}}.
\end{aligned}$$

On a pour une partie du lieu

$$4(\mathrm{A}+\mathrm{C})\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}'^2_{x_1}\mathrm{F}'^2_{y_1} = \mathrm{o},$$

qui représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

L'autre partie du lieu sera donnée au moyen de l'équation

$$(2)\left\{\begin{aligned} &2F'_{x_1}F'_{x_2}(4BF_1 - F'_{x_1}F'_{y_1}) + (4CF_1 - F'^2_{y_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2}) \\ &\quad = 2F'_{y_1}F'_{y_1}(4BF_1 - F'_{x_1}F'_{y_1}) + (4AF_1 - F'^2_{x_1})(F'_{x_1}F'_{y_2} + F'_{y_1}F'_{x_2}), \end{aligned}\right.$$

combinée avec l'équation de la normale, qui est

$$(4) \qquad (x_1 - x_2)F'_{y_2} - (y_1 - y_2)F'_{x_2} = 0,$$

et l'équation de la conique

$$F_2 = 0.$$

Remarquons d'abord que l'équation (3) représente une courbe du troisième degré en (x_1, y_1), et qui passe par le point (x_2, y_2); donc la conique fait partie du lieu; ce sont les deux autres points d'intersection de (3) et (4) qui donnent le lieu proprement dit. Déterminons ces deux points, et pour cela prenons pour axes la tangente et la normale à la conique au point (x_2, y_2). Appelons $2h$ la corde interceptée sur la normale par la conique, α et β les coordonnées du centre, nous aurons sans difficulté

$$(5) \qquad y_1^2 - 2y_1\left(\frac{\alpha^2}{\beta - h} + \beta\right) + 3\frac{\alpha^2}{\beta - h}h = 0.$$

Cette équation permettra de construire les deux points avec élégance. On obtiendra d'abord $\frac{\alpha^2}{\beta - h}$ en joignant le centre de la conique au milieu de $2h$ et en menant une perpendiculaire par le centre à cette droite. Le reste de la construction est connu. Remarquons que les deux racines de cette équation sont toujours réelles; que, dans le cas où $\beta > h$, cas de l'ellipse, les deux racines sont de même signe, l'une plus petite que $2h$ et l'autre plus grande. L'un des points est donc à l'intérieur de l'ellipse et correspond aux triangles imaginaires ayant un sommet réel et l'autre au lieu proprement dit.

Cherchons le coefficient angulaire de la tangente rapportée à ces deux axes, et, pour cela, représentons par φ le premier membre de l'équation (5); on a

$$\varphi'_{y_1} dy_1 + \varphi'_\beta d\beta + \varphi'_\alpha d\alpha + \varphi'_h dh = 0.$$

Mais, d'un autre côté, si l'on représente par s, t, u les distances du centre de courbure de la conique aux points $(0, y_1)$, $(0, \beta)$, $(0, h)$, par γ la cotangente de l'angle que fait la tangente à la conique au point $(0, 2h)$ avec l'axe des y et par ω l'angle de contingence, on aura

$$\varphi'_{y_1} dy_1 + \varphi'_\beta \alpha\omega + \varphi'_\alpha t\omega + \varphi'_h \gamma u\omega = 0,$$

$$dx_1 = -s\omega;$$

donc

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\alpha\varphi'_\beta + t\varphi'_\alpha + \gamma u\varphi'_h}{s}.$$

De la discussion précédente, il ressort que la courbe se compose de deux boucles, dont l'une est intérieure à l'ellipse et l'autre extérieure.

Cherchons à présent l'équation de cette courbe rapportée aux deux axes de l'ellipse. Si nous transportons cette hypothèse dans les équations (3) et (4), elles deviennent

$$b^2 y_1 x_2 [a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 - (c^2 x_1^2 - a^4)]$$
$$= a^2 y_2 x_1 [a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 + (c^2 y_1^2 + b^4)],$$
$$(x_1 - x_2) a^2 y_2 - (y_1 - y_2) b^2 x_2 = 0,$$

et, en éliminant x_2, y_2 entre ces deux équations et l'équation $a^2 y_2^2 + b^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0$, on trouve sans difficulté, en posant

$$S = a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2, \quad U = c^2 x_1^2 - a^4, \quad V = c^2 y_1^2 + b^4,$$

pour l'équation de la courbe

$$a^2 y_1^2 \left(\frac{S + U}{S - U}\right)^2 + b_2 x_1^2 \left(\frac{S - V}{S + V}\right)^2 = a^2 b^2,$$

qui est satisfaite par $S = 0$, et se décompose par conséquent en deux facteurs; le lieu est du huitième degré.