

G. DOSTOR

**Expression en déterminant de la surface
d'un quadrilatère en valeur des coordonnées
de ses quatre sommets consécutifs**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 559-563

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__559_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPRESSION EN DÉTERMINANT

de la surface d'un quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets consécutifs ;

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

PROBLÈME I. — *Un quadrilatère ABCD a son sommet A à l'origine des coordonnées, calculer la surface Q du quadrilatère en valeur des coordonnées $x', y', x'', y'', x''', y'''$ des trois autres sommets B, C, D.*

Supposons que les droites AB, AC, AD forment des angles croissants avec l'axe des x ; nous avons

$$2Q = 2ABC + 2ACD,$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

Retranchons du second membre le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

multiplié par zéro; nous obtenons

$$2Q = 1 \times \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix};$$

il viendra donc

$$(I) \quad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix}.$$

PROBLÈME II. — Déterminer la surface Q d'un quadrilatère $ABCD$ en valeur des coordonnées $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ de ses quatre sommets consécutifs A, B, C, D .

Transportons l'origine des coordonnées au sommet A , et appelons $x', y', x'', y'', x''', y'''$ les coordonnées des trois autres sommets B, C, D par rapport à cette nouvelle origine, de sorte que

$$\begin{aligned} x_1 &= x + x', & x_2 &= x + x'', & x_3 &= x + x''', \\ y_1 &= y + y', & y_2 &= y + y'', & y_3 &= y + y'''. \end{aligned}$$

Dans la formule (I), remplaçons les coordonnées $x', y', x'', y'', x''', y'''$ par leurs valeurs tirées de ces égalités; nous obtenons

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix},$$

ou

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 0 & 1 & x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix}.$$

Si, dans ce déterminant, nous ajoutons la première ligne à chacune des trois autres, la valeur du déterminant ne sera pas altérée, et nous aurons

$$(II) \quad {}^2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

pour la double surface du quadrilatère.

Autre expression de cette surface. — Si l'on développe le déterminant (II), on trouve que

$$\begin{aligned} {}^2Q = & \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or le second et le quatrième de ces déterminants, étant égaux et de signes contraires, s'entre-détruisent; il vient, par suite,

$${}^2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\begin{aligned} {}^2Q = & 1 \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ & + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ce déterminant est le développement suivant les dé-

terminants mineurs du troisième ordre d'un déterminant du quatrième ordre, dont la première colonne a pour éléments 1, 0, 1, 0. On a donc

$$(III) \quad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Aire du quadrilatère Q en valeur des quatre côtés consécutifs a, b, c, d et des deux diagonales m, n. —
La formule (I) nous donne

$$\begin{aligned} 2Q &= \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & x'' & y'' \\ 0 & x' - x''' & y' - y''' \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' - x''' & y' - y''' \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et, en élevant au carré, puis en multipliant chaque colonne par 2,

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2(x''^2 + y''^2) & 2(x'x'' + y'y'') - 2(x''x''' + y''y''') \\ 2(x'x'' + y'y'') - 2(x''x''' + y''y''') & 2(x'^2 + y'^2) \end{vmatrix}.$$

Or il est évident que

$$2(x''^2 + y''^2) = 2m^2, \quad 2(x' - x''')^2 + 2(y' - y''')^2 = 2n^2;$$

ensuite, puisque

$$\begin{aligned} a^2 &= x'^2 + y'^2, \quad b^2 = x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 - 2(x'x'' + y'y''), \\ c^2 &= x''^2 + y''^2 + x'''^2 + y'''^2 - 2(x''x''' + y''y'''), \\ d^2 &= x'^2 + y'^2, \end{aligned}$$

il vient

$$2(x'x'' + y'y'') - 2(x''x''' + y''y''') = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

Substituant dans la valeur de $16Q^2$, on obtient

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2m^2 & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2n^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2mn & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2mn \end{vmatrix},$$

pour le carré de la quadruple surface du quadrilatère.

En développant, on trouve la formule

$$16Q^2 = 4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2,$$

que nous avons donnée dans ces *Annales*, t. VII, p. 69, 1848.