

G. DOSTOR

**Note relative au rayon de la sphère
circonscrite au tétraèdre, en valeur des arêtes**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 523-527

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__523_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE RELATIVE AU RAYON DE LA SPHÈRE
CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE, EN VALEUR DES ARÊTES**

(voir 2^e série, t. XII, p. 370);

PAR M. G. DOSTOR,
Docteur ès sciences.

1. L'expression, sous forme de déterminant, du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en fonction des six

arêtes de ce tétraèdre, peut s'obtenir immédiatement au moyen de l'équation (I) de la page 371. En effet, cette équation

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ b & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ c & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donne d'abord

$$4R^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ b & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ c & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous multiplions par les quantités respectives a , b , c d'abord les trois dernières colonnes, puis les trois dernières lignes du second membre, et que nous remarquons que le facteur de $4R^2$, multiplié par $a^2 b^2 c^2$ ou $a^2 b^2 c^2 \Delta^2$, est égal à $36V^2$, nous voyons que

$$144V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 & ab \cos \nu & ca \cos \mu \\ b^2 & ab \cos \nu & b^2 & bc \cos \lambda \\ c^2 & ca \cos \mu & bc \cos \lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, retranchons la première colonne de chacune des trois suivantes, multiplions ensuite les trois dernières lignes par -2 et divisons la première colonne résultante par -2 , il nous vient

$$576V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & 2a^2 - 2ab \cos \nu & 2a^2 - 2ca \cos \mu \\ b^2 & 2b^2 - 2ab \cos \nu & 0 & 2b^2 - 2bc \cos \lambda \\ c^2 & 2c^2 - 2ca \cos \mu & 2c^2 - 2bc \cos \lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons actuellement la première ligne à chacune des trois suivantes, et retranchons de même la première co-

lonne des trois suivantes, nous trouvons que

$$576 V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu & c^2 + a^2 - 2ca \cos \mu \\ b^2 & a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu & 0 & b^2 + c^2 - 2ab \cos \lambda \\ c^2 & c^2 + a^2 - 2ca \cos \mu & b^2 + c^2 - 2bc \cos \lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, il nous suffira de remplacer les éléments $b^2 + c^2 - 2bc \cos \lambda$, $c^2 + a^2 - 2ca \cos \mu$, $a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu$ par les carrés des arêtes latérales a' , b' , c' , pour avoir l'équation demandée

$$(I) \quad 576 V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Autre forme de ce déterminant.* — Multiplions les trois dernières colonnes par les quantités respectives $b^2 c^2$, $c^2 a^2$, $a^2 b^2$, le déterminant sera multiplié par le produit $b^2 c^2 \cdot c^2 a^2 \cdot a^2 b^2 = a^4 b^4 c^4$, et nous obtiendrons

$$576 a^4 b^4 c^4 V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 b^2 c^2 & a^2 b^2 c^2 & a^2 b^2 c^2 \\ a^2 & 0 & a^2 c^2 c'^2 & a^2 b^2 b'^2 \\ b^2 & b^2 c^2 c'^2 & 0 & b^2 a^2 a'^2 \\ c^2 & c^2 b^2 b'^2 & c^2 a^2 a'^2 & 0 \end{vmatrix};$$

divisons ensuite les quatre lignes respectivement par $a^2 b^2 c^2$, a^2 , b^2 , c^2 ; le déterminant sera divisé par le produit $a^4 b^4 c^4$, et il nous viendra aussi

$$(II) \quad 576 V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 c'^2 & b^2 b'^2 \\ 1 & c^2 c'^2 & 0 & a^2 a'^2 \\ 1 & b^2 b'^2 & a^2 a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. *Troisième forme de déterminant (I).* — Dans ce dernier déterminant, multiplions les quatre lignes par les quantités respectives $aa'bb'cc'$, aa' , bb' , cc' ; le déterminant se trouve multiplié par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, de sorte que nous avons

$$576 a^2 a'^2 b^2 b'^2 c^2 c'^2 V^2 R^2 = - \begin{vmatrix} 0 & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' & aa'bb'cc' \\ aa' & 0 & aa'c^2c'^2 & aa'b^2b'^2 \\ bb' & bb'c^2c'^2 & 0 & bb'a^2a'^2 \\ cc' & cc'b^2b'^2 & cc'a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Divisons ensuite les trois dernières colonnes respectivement par $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$; le déterminant se trouve divisé par le produit $a^2a'^2b^2b'^2c^2c'^2$, et nous trouvons encore que

$$(III) \quad 576 V^2 A^2 = - \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

4. *Transformation du déterminant en produit.* — Dans ce dernier déterminant, remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; le déterminant ne change pas de valeur, et il vient, en divisant la première colonne résultante par $aa' + bb' + cc'$,

$$\begin{aligned} 576 V^2 R^2 &= - \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' + bb' + cc' & 0 & cc' & bb' \\ aa' + bb' + cc' & cc' & 0 & aa' \\ aa' + bb' + cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix} \\ &= - (aa' + bb' + cc') \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ 1 & cc' & 0 & aa' \\ 1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Donc le déterminant (III) est divisible par

$$aa' + bb' + cc'.$$

Dans le même déterminant, de la somme des deux premières colonnes retranchons la somme des deux dernières ; nous obtenons

$$\begin{aligned} 576V^2R^2 &= - \begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & aa' & bb' & cc' \\ aa' - bb' - cc' & 0 & cc' & bb' \\ bb' + cc' - aa' & cc' & 0 & aa' \\ bb' + cc' - aa' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix} \\ &= (bb' + cc' - aa') \begin{vmatrix} 1 & aa' & bb' & cc' \\ 1 & 0 & cc' & bb' \\ -1 & cc' & 0 & aa' \\ -1 & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix} ; \end{aligned}$$

par suite, le déterminant est aussi divisible par

$$bb' + cc' - aa'.$$

On verrait de même qu'il est encore divisible par

$$cc' + aa' - bb',$$

et par

$$aa' + bb' - cc'.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} 576V^2R^2 &= (aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa') \\ &\quad \times (cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc') \times q. \end{aligned}$$

Or, dans le déterminant (III), le produit des éléments situés sur la diagonale de droite à gauche est $-c^4c'^4$; il est aussi $-c^4c'^4$ dans le produit des facteurs qui précèdent q ; donc on a $q = 1$, de sorte que

$$(IV) \quad \left\{ \begin{aligned} 576V^2R^2 &= (aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa') \\ &\quad \times (cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc'). \end{aligned} \right.$$
