Nouvelles annales de mathématiques

E. Catalan

Propositions relatives à la théorie des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 518-523

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__518_0>

PROPOSITIONS RELATIVES A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. E. CATALAN.

I.

1. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 3(2n+1)^2,$$

dans laquelle les inconnues ne peuvent recevoir que des valeurs entières, nulles ou positives. L'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de $x+y+z$ *égale* $(2n+1)(-1)^n$.

2. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + (6z \mp 1)^2 = 24\mathrm{N} + 3,$$

dans laquelle les valeurs des inconnues sont encore assujetties aux conditions précédentes. Si le second membre n'est pas le triple d'un carré, la somme $x+y+z$ *admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.* (JACOBI.)

3. *Le triple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés de la forme* $(6\mu \mp 1)^2$. *Si le nombre donné est* $3(2n+1)^2$, *il y a au moins autant de décompositions que l'indique le plus grand entier contenu dans* $\frac{2n+1}{6}$.

4. *Soit l'équation*

$$(6x \mp 1)^2 + (6y \mp 1)^2 + 4(6z \mp 1)^2 = 6(2n+1)^2 \text{ (*)}.$$

(*) Les conditions relatives aux valeurs que peuvent recevoir les inconnues sont les mêmes que précédemment.

L'excès du nombre des valeurs paires de

$$x+y+z+\frac{3y^2\mp y}{2},$$

sur le nombre des valeurs impaires, égale $(2n+1)(-1)^n$.

5. *Soit l'équation*

$$(6x\mp 1)^2+(6y\mp 1)^2+4(6z\mp 1)^2=24N+6.$$

Si le second membre n'est pas le sextuple d'un carré, la quantité

$$x+y+z+\frac{3y^2\mp y}{2}$$

admet autant de valeurs paires que de valeurs impaires.

6. *Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme* $(6\mu\mp 1)^2$, *et le troisième la forme* $4(6\mu\mp 1)^2$.

7. *Soit l'équation*

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+16z^2=(2n+1)^2.$$

Soit, pour $z=0$, ε *l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* $\frac{y(y+1)}{2}$. *Soit, semblablement,* ε' *l'excès du nombre des valeurs paires de* $\frac{y(y+1)}{2}+z$ *sur le nombre des valeurs impaires,* z *étant positif. On a*

$$\varepsilon+2\varepsilon'=(2n+1)(-1)^n.$$

8. *L'excès du nombre des valeurs paires de* x, *satisfaisant à l'équation*

$$4x^2+4y^2+(2z+1)^2=(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - 1}{4} \ (^*).$$

9. *Si un nombre premier,* P, *n'est pas la somme de deux carrés,* P^2 *est décomposable en trois carrés.*

10. *Si un nombre premier,* P, *est égal à la somme de trois carrés,* P^2 *est généralement égal aussi à la somme de trois carrés.*

11. *L'équation*

$$4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = 8N + 1,$$

dans laquelle le second membre n'est pas carré, est vérifiée par un même nombre de valeurs paires et de valeurs impaires de x (**).

12. a *étant le nombre des solutions de l'équation*

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 2(2n+1)^2,$$

l'excès du nombre des valeurs paires de z, *qui vérifient*

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 8z^2 = 2(2n+1)^2,$$

sur le nombre des valeurs impaires, est

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)(-1)^n - a}{2}.$$

13. *Si l'on fait* $n = di$, *le nombre des solutions de l'équation*

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + \ldots + i_8^2 = 8n$$

(*) Dans l'application de ce théorème, on peut faire $y = 0$, mais non $x = 0$. En outre, à cause de la valeur de ε, *n doit être pair*. On peut donc remplacer l'équation par $4x^2 + 4y^2 + (2z+1)^2 = (4\mu+1)^2$, et alors la formule devient $\varepsilon = \mu$.

(**) On fait toujours abstraction de $x = 0$.

est égal à la somme des cubes des diviseurs d (*).

14. *Si, de plus,* $4n = i' + i''$, *alors*

$$\Sigma (\int i' \times \int i'') = 8 \Sigma d^3 \text{ (**)}.$$

15. *La somme des diviseurs d'un nombre impair, i, est égale à la somme des produits deux à deux des excès relatifs aux nombres impairs dont la somme est* $2i$ (***).

II.

Les propositions précédentes sont extraites d'un Mémoire intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis*. MM. Le Besgue et Chabanel ont fait voir que la proposition 10, corollaire du théorème 8, est tout simplement la *traduction* de l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 \text{ (****)}.$$

Ce moyen de démonstration, basé sur de simples identités, est-il applicable à quelques-unes des propositions énoncées ci-dessus? Cela est désirable. Quoi qu'il en soit,

---

(*) $i, i_1, i_2, i_3, \ldots$ désignent des nombres *impairs*.

(**) La notation $\int p$, employée par Euler, représente la *somme des diviseurs de p*.

(***) J'appelle *excès relatif à un nombre impair* N l'excès du nombre des diviseurs de N, ayant la forme $4\mu + 1$, sur le nombre de ceux qui ont la forme $4\mu - 1$.

(****) En outre, comme le fait observer M. Chabanel : 1° *il est inutile que le nombre* $a^2 + b^2 + c^2$ *soit premier;* 2° on peut *permuter* les lettres a, b, c. Cette seconde remarque donne lieu, par exemple, aux trois décompositions suivantes :

$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2,$$
$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 24^2 + 12^2 + 11^2,$$
$$(4^2 + 3^2 + 2^2)^2 = 21^2 + 16^2 + 12^2.$$

voici quelques identités (*) qui se rapportent à la *décomposition, en quatre carrés, du carré d'une somme de trois carrés :*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2\\ &\quad+(ab-ac)^2+(a^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (c^2+a^2)^2+(bc+ba)^2\\ &\quad+(bc-ba)^2+(b^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (a^2+b^2)^2+(ca+cb)^2\\ &\quad+(ca-cb)^2+(c^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (a^2+2bc)^2+(ab-ac)^2\\ &\quad+(ab-ac)^2+(b^2-c^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (b^2+2ca)^2+(bc-ba)^2\\ &\quad+(bc-ba)^2+(c^2-a^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (c^2+2ab)^2+(ca-cb)^2\\ &\quad+(ca-cb)^2+(a^2-b^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (a^2-2bc)^2+(ab+ac)^2\\ &\quad+(ab+ac)^2+(b^2-c^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (b^2-2ca)^2+(bc+ba)^2\\ &\quad+(bc+ba)^2+(c^2-a^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (c^2-2ab)^2+(ca+cb)^2\\ &\quad+(ca+cb)^2+(a^2-b^2)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2 &= (bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2\\ &\quad+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2,\end{aligned}\right.$$

(*) Toutes ces relations sont des cas particuliers de l'égalité

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) &= (aa'+bb'+cc'+dd')^2\\ +(ab'-ba'-cd'+dc')^2&+(ac'+bd'-ca'-db')^2+(ad+cb'-bc'-da')^2\end{aligned}$$

trouvée par Euler. Je ferai remarquer, en passant, que le second membre de celle-ci peut être écrit d'*au moins vingt-quatre manières différentes.*

$$(11) \quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (bc+ca-ab)^2+(a^2+bc)^2 \\ \qquad\qquad + (b^2+ca)^2+(c^2-ab)^2, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (ca+ab-bc)^2+(b^2+ca)^2 \\ \qquad\qquad + (c^2+ab)^2+(a^2-bc)^2, \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} (a^2+b^2+c^2)^2 = (ab+bc-ca)^2+(c^2+ab)^2 \\ \qquad\qquad + (a^2+bc)^2+(b^2-ca)^2. \end{cases}$$

III.

Puisque l'occasion s'en présente, je rappellerai ici les énoncés de deux théorèmes d'Arithmétique démontrés dans des recueils peu répandus :

1° *a, b étant deux nombres entiers, premiers entre eux, la fraction*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b-1)}{1.2.3\ldots a \times 1.2.3\ldots b}$$

est réductible à un nombre entier.

2° *a, b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction*

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a \times (b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est réductible à un nombre entier.