NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. HIOUX

Solution de la question de mécanique rationnelle proposée au concours d'agrégation de 1873

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 507-512

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__507_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1873;

PAR M. V. HIOUX.

Une circonférence homogène de masse totale m peut tourner autour d'un diamètre horizontal AA′ *comme charnière. Cette charnière fait corps en son milieu avec un axe vertical* BB′ *autour duquel le système tourne avec une vitesse constante et donnée. Par suite de cette rotation, l'anneau tend à se placer dans un plan horizontal; mais cette tendance est combattue par l'action de la pesanteur sur une masse additionnelle* M *fixée à l'extrémité* C *du diamètre perpendiculaire à la charnière. On propose :* 1° *de déterminer la position angulaire pour laquelle l'anneau resterait en repos relatif;* 2° *de trouver et de discuter pour une époque quelconque l'expression de la vitesse angulaire de l'anneau autour de la charnière.*

(*) La théorie des engrenages à axes parallèles et à axes concourants de White a été faite pour la première fois par Olivier dans deux Mémoires rédigés par lui depuis 1816, présentés en 1826 à l'Académie des Sciences, et insérés ensuite dans le *Journal de M. Liouville,* t. IV et V, 1839 et 1840.

Soient O le centre de l'anneau, R son rayon et G le centre de gravité du système des deux masses m et M. Le point G se trouve sur OC à une distance l du point O, telle que l'on ait

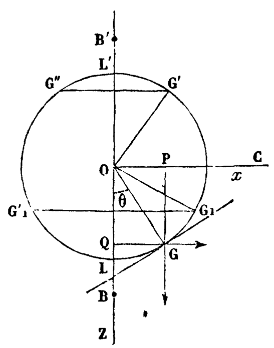
$$ml = M(R - l), \quad \text{d'où} \quad l = \frac{MR}{M + m}.$$

Cette longueur l est indépendante du temps et de la vitesse de rotation ω. Si l'on suppose le point G invariablement lié à l'anneau, la question se trouve ramenée à la suivante :

Un point matériel de masse $\mu = M + m$ *décrit une circonférence dont le plan est vertical et qui tourne uniformément autour de l'axe* BB′ *avec une vitesse donnée* ω : *étudier le mouvement de ce point matériel* G.

Prenons pour axe des z la droite OB (*fig.* 1) dirigée dans le sens de la pesanteur, et pour axe des x la direc-

Fig. 1.



tion OC perpendiculaire à Oz; désignons par θ l'angle BOG que fait le rayon OG avec Oz à l'époque t.

D'après le principe de Coriolis, le cercle OG de rayon l

pourra être considéré comme immobile si l'on joint à l'action de la pesanteur sur la masse μ les forces fictives dues à la rotation. La force centrifuge composée agit perpendiculairement à la vitesse relative dirigée suivant la tangente au cercle; l'effet de cette force est donc nul sur le mouvement du point G qui s'effectue dans la direction de cette tangente. Nous n'avons donc à tenir compte que de la force centrifuge $\mu\omega^2 l \sin\theta$ et du poids μg du point G.

Si l'on projette ces deux forces sur la tangente au point G, en remarquant que leur résultante est $\mu \frac{d^2 s}{dt^2}$ ou $\mu l \frac{d^2\theta}{dt^2}$, on a, pour l'équation différentielle du mouvement,

$$(1) \qquad l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta + l\omega^2\sin\theta\cos\theta,$$

en observant que la pesanteur agit de façon à diminuer l'angle θ, et que la force centrifuge produit l'effet opposé.

1° Le point G sera en repos relatif si l'on a

$$\mu l \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin\theta(l\omega^2\cos\theta - g) = 0.$$

Si l'on pose $\sin\theta = 0$, d'où $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on voit qu'il y a possibilité de repos relatif quand le point G se trouve sur l'axe Oz soit en L, soit en L'.

Si l'on pose $l\omega^2\cos\theta - g = 0$, d'où $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$, et si la valeur de $\cos\theta$ est admissible, c'est-à-dire égale ou inférieure à 1, il pourra y avoir repos relatif pour une valeur θ_1 de θ déduite de cette relation.

Soit $\mathrm{LOG}_1 = \theta_1$; si l'on place le point G en G_1 sans vitesse initiale, il y restera en repos relatif, ce qui revient à dire que le point G décrit sur la sphère de rayon OG un parallèle déterminé dont le plan est perpendiculaire à l'axe Oz.

2° Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $2l d\theta$, et intégrons par rapport à θ, il vient

$$v^2 = 2gl\cos\theta + l^2\omega^2\sin^2\theta + c.$$

Pour déterminer la constante, supposons que, pour $t=0$, le mobile soit en L, point de repos relatif, avec une vitesse v_0. L'équation précédente donne alors, pour $\theta = 0$,

$$c = v_0^2 - 2gl.$$

L'expression de la vitesse est, par suite,

$$(2) \qquad v^2 = -l^2\omega^2\cos^2\theta + 2gl\cos\theta + l^2\omega^2 + v_0^2 - 2gl.$$

Nous sommes ainsi conduit à étudier les variations d'un trinôme du second degré en $\cos\theta$. Cette étude se fait aisément si l'on met l'expression (2) sous la forme

$$(3) \qquad v^2 = \frac{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}{\omega^2} - l^2\omega^2\left(\cos\theta - \frac{g}{l\omega^2}\right)^2.$$

Les racines du second membre sont données par la formule

$$\cos\theta = \frac{g \pm \sqrt{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}}{l\omega^2}.$$

On voit que la racine positive doit être rejetée, et que la racine négative n'est admissible que si l'on a

$$v_0^2 < 4gl \quad \text{ou} \quad 2g \times 2l.$$

Ainsi la vitesse du mobile G ne s'annulera jamais si la vitesse v_0 du point L est supérieure à celle qu'il acquerrait en tombant le long de Oz d'une hauteur égale à $2l$.

Si l'on a

$$v_0^2 = 4gl,$$

on a

$$v^2 = 0 \quad \text{pour} \quad \cos\theta = -1, \quad \text{ou} \quad \theta = \pi.$$

Le mobile décrit le demi-cercle LGL′, s'arrête en L′ et y demeure indéfiniment en éuqilibre relatif instable.

L'inégalité $v_0^2 < gl$ est indépendante de la vitesse de rotation ω. Faisons, dans l'équation (2), $\omega = 0$ et $v_0^2 = 4gl$, nous obtenons

$$v^2 = 2gl(1 + \cos\theta) = 4gl\cos^2\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\theta}{2},$$

et, par suite,

$$T = \left(-\log\operatorname{tang}\frac{\pi - \theta}{4}\right)_0^{\pi} \times \sqrt{\frac{l}{g}},$$

et enfin

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \times (-\log 0 + 0) \quad \text{ou} \quad T = \infty.$$

On peut donc dire que, dans ce cas, l'anneau n'atteindra jamais une position verticale, mais s'en rapprochera indéfiniment en marchant dans le même sens.

Discussion du trinôme.

Première hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} < 1$ et $v_0^2 < 4gl$. — Le trinôme s'annule pour une valeur θ' de θ telle que

$$\cos\theta' = \frac{g - \sqrt{\omega^2 v_0^2 + (g - l\omega^2)^2}}{l\omega^2} = -h.$$

Si l'on fait varier θ d'une manière continue depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta'$, la valeur de v^2, d'abord égale à v_0^2, croît d'une manière continue, et prend une valeur *maximum* quand on a $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_1$.

La valeur de θ augmentant toujours, celle de v^2 diminue et devient nulle pour $\theta = \theta'$. Le point G atteint une position limite G′ qu'il ne peut dépasser.

Si l'on fait décroître θ depuis $\theta = \theta'$ jusqu'à $\theta = 0$, la vitesse v repassera par les mêmes valeurs, mais en sens inverse, et, comme le changement de θ en $-\theta$ n'altère pas le trinôme, le point G franchira le point L et décrira un arc GG″ symétrique de GG′. Le point G se mouvra par suite indéfiniment du point G′ au point G″, et inversement. Ainsi, dans ce cas, l'anneau a un mouvement oscillatoire dont l'amplitude angulaire est égale à $2\theta'$.

La vitesse v est deux fois nulle, deux fois maximum, et deux fois égale à v_0 en des couples de points correspondants sur les deux arcs GG′ et GG″.

Si l'on suppose $v_0^2 > 4gl$, le trinôme ne s'annule pour aucune valeur de θ; la valeur de v^2, maximum pour $\theta = \theta_1$, devient minimum pour $\theta = \pi$ ou $\cos\theta = -1$. L'anneau tourne indéfiniment dans le même sens autour de son axe AA′, d'un mouvement périodique.

Deuxième hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} = 1$, $v_0^2 < 4gl$. — Dans ce cas, on a $\theta_1 = 0$, et le point G_1 se confond avec le point L. Le maximum de v^2 est v_0^2; c'est la seule restriction qu'il faut apporter à l'étude de l'hypothèse précédente.

Troisième hypothèse : $\frac{g}{l\omega^2} > 1$. — Le point G ne peut encore être en repos relatif qu'au point L ou au point L′. Si l'on a $v_0^2 < 4gl$, le mouvement est oscillatoire, et le maximum de v^2 est v_0^2. Si, au contraire, on a $v_0^2 > 4gl$, la valeur de v^2 est minimum pour $\cos\theta = -1$, et ce minimum est égal à $v_0^2 - 4gl$. On a un mouvement périodique s'effectuant toujours dans le même sens.