

A. DE SAINT-GERMAIN

**Des cas où l'on peut résoudre l'équation du
second degré par approximations successives**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 401-404

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__401_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DES CAS OU L'ON PEUT RÉSOUDRE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, par approximations successives, n'est avantageuse que si a est très-petit; mais on peut chercher dans quelles limites la méthode peut s'appliquer, c'est-à-dire donner des valeurs tendant indéfiniment vers une des racines de l'équation. Quand a et c sont de même signe, la question est facile: on démontre d'habitude que l'erreur commise après la $m^{\text{ième}}$ approximation est $< \frac{c}{b} \left(\frac{4ac}{b^2} \right)^m$. La méthode est donc applicable si $4ac < b^2$, et cette condition suffisante est nécessaire; car, si elle n'est pas satisfaite, x est imaginaire, et ne saurait être la limite d'une suite de valeurs évidemment réelles.

Considérons le cas où l'équation a la forme

$$\varphi(x) = ax^2 + bx - c = 0.$$

Les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots$, obtenues par un procédé bien connu sont tour à tour supérieures et inférieures à x , x désignant à l'avenir la racine positive de l'équation; on sait même qu'en écartant le cas où x_2 serait négatif, ce qui entraînerait $ac > b^2$, $x_1, x_3, x_5, \dots$ vont en diminuant, et $x_2, x_4, \dots$ en croissant, de sorte que ces deux séries de nombres se rapprochent constamment de x ; mais il faut qu'elles s'en approchent indéfiniment. Je désigne par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ les valeurs absolues des erreurs correspondant aux approximations successives, et j'écris la relation connue

$$(1) \quad \varepsilon_{m+1} = \frac{a}{b} (x + x_m) \varepsilon_m.$$

On en conclut $\varepsilon_{m+1} < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^m \varepsilon_1$; la méthode est applicable si $\frac{ac}{b^2} < \frac{1}{2}$. Ici cette condition n'est plus nécessaire; mais il est clair que les erreurs ne tendront pas vers zéro quand x sera $> \frac{b}{2a}$. Supposons, en effet, que x soit $> \frac{b}{2a}$ et que ε_m tende vers zéro; x_m se rapprochera de plus en plus de x , et $x + x_m$ deviendra, à partir d'une valeur suffisante de m , $> \frac{b}{a}$; alors ε_{m+1} sera $> \varepsilon_m$; les nombres $\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \dots$ allant en croissant ne tendent pas vers zéro, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. D'ailleurs, la condition $x > \frac{b}{2a}$ revient à

$$\varphi\left(\frac{b}{2a}\right) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{b^2} > \frac{3}{4}.$$

Je dis maintenant que, si x est $\leq \frac{b}{2a}$, ou $\frac{ac}{b^2} \leq \frac{3}{4}$, les erreurs successives tendent vers zéro. Dans l'équation (1), je fais tour à tour $m = 2n$, et $m = 2n - 1$, et je remplace x_{2n} par $x - \varepsilon_{2n}$, x_{2n-1} par $x + \varepsilon_{2n-1}$:

$$\varepsilon_{2n+1} = \frac{a}{b} (2x - \varepsilon_{2n}) \varepsilon_{2n},$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{a}{b} (2x + \varepsilon_{2n-1}) \varepsilon_{2n-1} \quad (*).$$

(*) Cette formule montre que si $x = \frac{b}{2a}$, d'où $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, on a $\varepsilon_{2n} > \varepsilon_{2n-1}$; alors les termes de rangs pairs de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ surpassent ceux qui les précèdent immédiatement. Pour que les termes de cette suite aient des valeurs constamment décroissantes, à partir du second ε_1 , il faut qu'on ait $\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$ (1^{re} série, t. XVI, p. 436); mais cette condition n'est pas nécessaire pour que les termes deviennent moindres que tout nombre donné. (G.)

Éliminant ε_{2n} , on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2n+1} = \frac{a^2}{b^2} \left[4x^2 + 2x \left(1 - \frac{2ax}{b} \right) \varepsilon_{2n-1} \right. \\ \left. - \frac{4ax}{b} \varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a}{b} \varepsilon_{2n-2}^3 \right] \varepsilon_{2n-1}. \end{array} \right.$$

Si l'on a précisément $x = \frac{b}{2a}$, $\frac{ac}{b^2} = \frac{3}{4}$, cette relation devient

$$\varepsilon_{2n+1} = \left(1 - 2 \frac{a^2}{b^2} \varepsilon_{2n-1}^2 - \frac{a^3}{b^3} \varepsilon_{2n-1}^3 \right) \varepsilon_{2n-1}.$$

On ne peut supposer que les nombres de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots$, ε_{2n+1} restent au-dessus d'un nombre fini, car alors $\frac{\varepsilon_{2n+1}}{\varepsilon_{2n-1}}$ étant moindre qu'un nombre < 1 , les erreurs considérées décroîtraient plus vite que les termes d'une progression décroissante, et tendraient vers zéro, ce qui renverse l'hypothèse : donc ε_{2n+1} a pour limite zéro, et il en est par suite de même pour ε_{2n} .

Quand x est $< \frac{b}{2a}$ ou $\frac{ac}{b^2} < \frac{3}{4}$, les approximations successives doivent, *a fortiori*, converger vers x ; mais la formule (2) le prouve rigoureusement. Comme $\frac{ac}{b^2}$ est < 1 , nous sommes sûr que $x_1, x_3, \dots$ décroissent constamment, ainsi que $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots$; on aura donc $\varepsilon_{2n-1} = \theta \varepsilon_1$, θ étant < 1 . Posons $x = \frac{b}{2a} (1 - h)$, on a

$$\varepsilon_1 = \frac{ax^2}{b} = \frac{b(1-h)^2}{4a}, \quad \varepsilon_{2n-1} = \theta(1-h)^2 \frac{b}{4a}.$$

Substituons dans (2), et représentons par $-k^2(1-h)^2$ la somme des deux derniers termes de la parenthèse, il vient

$$\varepsilon_{2n+1} = (1-h)^2 \left[1 + \frac{\theta h}{4} (1-h) - k^2 \right] \varepsilon_{2n-1}.$$

La parenthèse est moindre que $(1 + h)^2$, donc

$$\varepsilon_{2n+1} < (1 - h^2)^2 \varepsilon_{2n-1};$$

les erreurs décroissent plus vite que les termes d'une progression dont la raison serait $(1 - h^2)^2$; la méthode des approximations sera donc applicable, sinon rapide, tant que $\frac{ac}{b^2}$ sera $\leq \frac{3}{4}$.