

MONNIOT

Sur le tore et la sphère bitangente

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 383-385

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__383_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE TORE ET LA SPHÈRE BITANGENTE;

PAR M. MONNIOT.

Soit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - d^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

l'équation d'un tore dont le méridien dans le plan $y = 0$ a pour équation

$$x^2 + z^2 + a^2 - d^2 = \pm 2ax,$$

qui représente deux cercles.

La sphère $(x - \alpha)^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 = 0$ sera *bitangente au tore* si le cercle $(x - \alpha)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 = 0$ est tangent intérieurement à l'un des cercles méridiens et extérieurement à l'autre. Les équations de condition seront

$$\sqrt{(\alpha - a)^2 + \gamma^2} + d = r,$$

$$\sqrt{(\alpha + a)^2 + \gamma^2} - d = r;$$

d'où l'on déduit

$$(K) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = r^2 + d^2 - a^2, \\ 4a\alpha = 4dr, \\ \gamma^2 = r^2 + d^2 - a^2 - \frac{d^2 r^2}{a^2}. \end{cases}$$

L'équation de la sphère bitangente pourra s'écrire

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\gamma z + d^2 - a^2 = 0,$$

ou, en posant $a^2 - d^2 = c^2$,

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 2\alpha x + 2\gamma z.$$

L'équation du tore s'écrit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)^2 + 4c^2z^2 + 4(c^2 - a^2)(x^2 + y^2) = 0,$$

ou enfin

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + z^2 - c^2)^2 + 4c^2z^2 - 4d^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On aura une surface passant par les points communs au tore et à la sphère, en élevant les deux membres de l'équation (1) au carré, et la retranchant de l'équation (2), ce qui donne, après transposition et suppression du facteur 4,

$$(3) \quad (\alpha x + \gamma z)^2 + c^2z^2 - d^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On aura démontré que *l'intersection du tore et de la sphère bitangente se compose de deux cercles*, si l'on fait voir que la surface représentée par l'équation (3) est un système de deux plans. Or cette équation peut s'écrire

$$[(\alpha^2 - d^2)x^2 + 2\alpha\gamma xz + (\gamma^2 + c^2)z^2] - d^2y^2 = 0;$$

et le théorème sera démontré, si l'on fait voir que la quantité entre crochets est un carré parfait, ou que

$$\alpha^2\gamma^2 - (z^2 - d^2)(\gamma^2 + c^2) = 0,$$

ou

$$- \alpha^2c^2 + \gamma^2d^2 + c^2d^2 = 0,$$

ou

$$- \alpha^2(a^2 - d^2) + \gamma^2d^2 + c^2d^2 = 0,$$

ou

$$a^2 + \gamma^2 + c^2 = \frac{a^2 x^2}{d^2},$$

ou, d'après les équations (K),

$$r^2 + d^2 - a^2 - a^2 - d^2 = r^2,$$

ce qui est évident.