Nouvelles annales de mathématiques

A. Laisant

Sur les rayons de courbure des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 367-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__367_1>

SUR LES RAYONS DE COURBURE DES COURBES PLANES;

PAR M. A. LAISANT.

1. L'objet que nous nous proposons dans la présente Note est de déterminer une construction *graphique*, permettant de construire sur un plan le rayon de courbure d'une courbe plane. Cette courbe étant bien définie, soit par son équation, soit par une génération géométrique ou mécanique, soit de toute autre manière, nous supposons qu'elle est tracée d'une façon tout à fait rigoureuse, en sorte que la tangente en chaque point peut être conduite exactement.

2. On pourrait, dans cette hypothèse, obtenir les normales à la courbe dans le voisinage d'un point, et la développée serait déterminée par l'enveloppe des droites tracées de cette manière. Mais il est bien évident qu'ainsi le centre de courbure serait, en réalité, déterminé par l'intersection de droites très-rapprochées et se coupant sous un très-petit angle; c'est un procédé vicieux au point de vue graphique.

Nous essayerons de substituer à cette construction des moyens plus satisfaisants, en employant à cet effet une courbe déduite de la courbe donnée et que l'on pourra tracer en toute rigueur; elle servira ensuite à obtenir la solution désirée, à peu près à la manière des courbes d'erreurs si fréquemment employées dans la pratique.

3. Soient

C une courbe plane dont l'équation est $f(X, Y) = 0$ en coordonnées rectangulaires;

M un point de cette courbe ayant pour coordonnées x et y;

$p = \frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe C;

ρ le rayon de courbure en M.

Supposons que, de chaque point $M(x, y)$, on déduise un point correspondant M_1, au moyen d'une construction géométrique *dans laquelle figure la tangente au point* M; et appelons C_1 la courbe formée par tous les points M_1.

Les coordonnées x_1, y_1 dépendront à la fois de x, y et p, c'est-à-dire qu'on aura

$$x_1 = F_1(x, y, p), \quad y_1 = f_1(x, y, p).$$

On déduira de là, par différentiation,

$$dx_1 = \frac{dF_1}{dx} dx + \frac{dF_1}{dy} dy + \frac{dF_1}{dp} dp,$$
$$dy_1 = \frac{df_1}{dx} dx + \frac{df_1}{dy} dy + \frac{df_1}{dp} dp,$$

et, si nous appelons p_1 le coefficient angulaire $\frac{dy_1}{dx_1}$

de la tangente en M_1 à la courbe C_1,

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{df_1}{dx} dx + \frac{df_1}{dy} dy + \frac{df_1}{dp} dp}{\frac{dF_1}{dx} dx + \frac{dF_1}{dy} dy + \frac{dF_1}{dp} dp}$$

$$= \frac{\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} p + \frac{df_1}{dp} \frac{dp}{dx}}{\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy} p + \frac{dF_1}{dp} \frac{dp}{dx}}.$$

Les fonctions F_1 et f_1 dépendant de x, y et p, il s'ensuit què p_1 dépendra de x, y, p et $\frac{dp}{dx}$, c'est-à-dire que l'on aura

$$(1) \qquad p_1 = \varphi\left(x, y, p, \frac{dp}{dx}\right).$$

Or le rayon de courbure ρ est fourni par la formule connue

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}},$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression (1), celle-ci prendra la forme

$$p_1 = \Phi(x, y, p, \rho),$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à ρ, on aura

$$(3) \qquad \rho = \Psi(x, y, p, p_1).$$

Le rayon de courbure cherché dépendra donc seulement du point M, et de la direction des tangentes en M et M_1 aux deux courbes C et C_1. Ces divers éléments graphiques étant connus, il sera possible généralement de déterminer le rayon de courbure.

4. La méthode peut exceptionnellement se trouver en défaut si, par suite de réductions de calcul, l'expression $\frac{dp}{dx}$ se trouve éliminée de l'équation (1). C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque la courbe C_1 est parallèle à la courbe C, cas sur lequel nous reviendrons vers la fin de cette étude.

Mais il n'y a que certains procédés particuliers de construction qui puissent conduire à un semblable résultat. Aussi peut-on très-bien considérer la solution indiquée comme entièrement générale.

5. Quoi qu'il en soit, la valeur pratique de cette méthode doit être considérée comme d'autant plus grande que les constructions à effectuer seront plus simples, c'est-à-dire que la formule (3) sera plus simple elle-même. Ce résultat dépend essentiellement du procédé de construction ou de *transformation*, par lequel la courbe C_1 se déduit de la courbe C. Nous allons successivement en passer en revue quelques-uns, donnant lieu à des formules et à des constructions assez simples, ou se prêtant à des remarques intéressantes.

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons uniformément par :

MP l'ordonnée y du point M limitée à l'axe des x;
MQ l'abscisse x du même point limitée à l'axe des y;
MT la tangente en M à la courbe C, *limitée à l'axe des* x;
MN la normale en M à la courbe C, *limitée à l'axe des* x.

M_1P_1, M_1Q_1, M_1T_1, M_1N_1 seront les lignes analogues relatives au point M_1 et à la courbe C_1.

Il est bon de remarquer que toutes les constructions indiquées en partant de l'axe des x pourront se faire en partant d'une droite quelconque; car rien n'oblige à prendre *a priori*, pour axe des x, une droite sur le plan plutôt qu'une autre.

6. *Première transformation.* — On mène par le point T une parallèle à Oy jusqu'à la rencontre de MQ. Cette intersection donne le point M_1.

Les coordonnées x_1, y_1 sont alors fournies par les formules

$$x_1 = x - \frac{y}{p}, \quad y_1 = y;$$

on en déduit

$$p_1 = \frac{p^3}{y\frac{dp}{dx}} = \frac{\rho}{y}\frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et, si l'on appelle α l'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x, d'où $p = \tang\alpha$, il vient

$$p_1 = \frac{\rho\sin^3\alpha}{y} = \frac{\rho\sin^3\alpha}{y_1},$$

puisque

$$y = y_1;$$

de là

$$\rho = \frac{p_1 y_1}{\sin^3\alpha}.$$

p_1y_1 étant la sous-normale en M_1, il en résulte que *le rayon de courbure cherché est égal à la sous-normale en* M_1, *divisée par le cube du sinus de l'inclinaison de la tangente en* M *sur l'axe des x*.

Cette propriété permet d'obtenir le centre de courbure par une construction géométrique fort simple, en ayant égard aux signes.

7. *Deuxième transformation.* — On obtient le point M_1 en construisant le point symétrique de T par rapport à MQ.

Les formules sont

$$x_1 = x - \frac{y}{p}, \quad y_1 = 2y,$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p^3}{y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{2\rho}{y} \cdot \frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\rho}{y}\sin^3\alpha = \frac{4\rho}{y_1}\sin^3\alpha,$$

$$\rho = \frac{1}{4}\frac{p_1 y_1}{\sin^3\alpha}.$$

$p_1 y_1$ étant la sous-normale en M_1, on a un énoncé identique au précédent, au facteur $\frac{1}{4}$ près, et une construction géométrique pareille.

Comme procédé graphique, cette seconde construction sera préférable à la première, lorsqu'on aura suffisamment de place pour l'exécuter.

8. *Troisième transformation.* — On prolonge la droite TM au delà du point M, d'une longueur égale à elle-même $MM_1 = TM$.

On a

$$x_1 = x + \frac{y}{p}, \quad y_1 = 2y;$$

on tire de là

$$p_1 = \frac{2p^3}{2p^2 - y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{2}{\dfrac{2}{p} - \dfrac{y}{p^3}\dfrac{dp}{dx}} = \frac{2}{\dfrac{2}{p} - \dfrac{y}{\rho}\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}},$$

$$\rho = \frac{y\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}}{2\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p_1}\right)}.$$

En posant, comme ci-dessus, $p = \tang\alpha$ et, de plus, $p_1 = \tang\alpha_1$, on obtient

$$2\rho \sin^2\alpha = \frac{y \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Ce résultat donne lieu à la construction assez simple que voici. Soient

A le point de rencontre de MP et de $M_1 Q_1$;
AB une parallèle à $M_1 N_1$ rencontrant MN en B;
BD une parallèle à MT, menée jusqu'à la rencontre de MQ;
DE une parallèle à OY, menée jusqu'à la rencontre de MN.

Le milieu ω de ME sera le centre de courbure cherché.

9. *Quatrième transformation*. — On mène par N une parallèle à OY, jusqu'à la rencontre de MQ. Le point M_1 est déterminé par l'intersection de ces deux droites.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{p}{1 + p^2 + y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p}{1 + p^2 + y\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}}$$
$$= \frac{p}{(1+p^2)\left(1 + \dfrac{y}{\rho}\sqrt{1+p^2}\right)} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}},$$
$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tang\alpha_1} - 1},$$

en conservant toujours les mêmes relations que plus haut.

Cette formule revient à

$$\rho = \frac{\mathrm{MN.TN}}{\mathrm{T_1 T}};$$

elle permet, par conséquent, d'obtenir le rayon de courbure par une construction géométrique très-facile.

10. *Cinquième transformation.* — Le point M_1 est symétrique de N par rapport à MQ.

Les formules sont

$$y_1 = 2y, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p}{1 + p^2 + y\dfrac{dp}{dx}}$$

$$= \frac{2p}{(1+p^2)\left(1 + \dfrac{y\sqrt{1+p^2}}{\rho}\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}},$$

$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha_1} - 1}.$$

Cela donne la même formule que ci-dessus

$$\rho = \frac{\mathrm{MN.TN}}{\mathrm{T_1 T}},$$

et, par suite, la même construction géométrique.

11. *Sixième transformation.* — On prolonge la droite NM au delà du point M, d'une longueur égale à elle-même $MM_1 = NM$.

Les formules sont

$$y_1 = 2y, \quad x_1 = x - py;$$

d'où

$$p_1 = \frac{2p}{1 - p^2 - y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{2p}{1 - p^2 - \dfrac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}},$$

$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha - \dfrac{\sin 2\alpha}{\tan g\,\alpha_1}}.$$

Cela donne encore

$$\rho = \frac{\text{MN.TN}}{\text{TT}_1}.$$

12. *Septième transformation.* — Par l'origine O, on mène OM_1, égale et parallèle à TM, et dirigée dans le même sens.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = \frac{y}{p};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p^3}{p^2 - y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p^3}{p^2 - \dfrac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha - \dfrac{y}{\rho}},$$

$$\rho = \frac{y\sin\alpha_1}{\sin^2\alpha\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Cela donne

$$\rho = \frac{\text{MT}^3}{\text{MP.OT}_1}$$

et conduit, par suite, à une construction géométrique élémentaire.

13. *Huitième transformation.* — Par l'origine O, on mène OM_1, égale et parallèle à NM, et dirigée dans le même sens.

Les formules sont

$$y_1 = y, \quad x_1 = -py;$$

d'où

$$p_1 = -\frac{p}{p^2 + y\dfrac{dp}{dx}} = -\frac{p}{p^2 + \dfrac{y}{\rho}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\tang\alpha}{\tang^2\alpha + \dfrac{y}{\rho\cos^3\alpha}},$$

$$\rho = -\frac{y\sin\alpha_1}{\sin\alpha\cos(\alpha-\alpha_1)}.$$

Si MN_2 est parallèle à M_1N_1, N_2 étant sur l'axe des x, et si K est la projection de N_2 sur MN, on trouve

$$\rho = \frac{MP.TN}{MK}.$$

Le centre de courbure s'obtient encore ici par une quatrième proportionnelle.

14. *Neuvième transformation.* — Au point T, on élève $TM_1 = TM$, perpendiculaire sur l'axe des x.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}, \quad x_1 = x - \frac{y}{p};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p^2(1+p^2) - y\dfrac{dp}{dx}}{y\sqrt{1+p^2}\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p^2\rho - y\sqrt{1+p^2}}{y(1+p^2)} = \frac{\rho\sin^2\alpha - y\cos\alpha}{y},$$

$$\rho = y\frac{\tang\alpha_1 + \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Cela donne

$$\rho = \frac{MT^2.T_1N}{MN.T_1T};$$

d'où résulte une construction élémentaire pour le rayon de courbure cherché.

15. *Dixième transformation.* — Au point N, on élève $NM_1 = NM$, perpendiculaire sur l'axe des x.

Les formules sont

$$y_1 = y\sqrt{1+p^2}, \quad x_1 = x + py,$$

d'où

$$p_1 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La valeur de $\frac{dp}{dx}$ et, par suite, celle de ρ s'éliminant ici, on voit que cette construction ne saurait servir à la détermination du rayon de courbure; mais elle conduit à un théorème facile à énoncer. Si, en effet, nous faisons le produit des valeurs de y_1 et de p_1, nous avons

$$y_1 p_1 = yp.$$

Donc *les deux courbes* C *et* C_1 *ont leurs sous-normales égales en* M *et* M_1, c'est-à-dire que $PN_1 = 2PN$.

16. *Onzième transformation.* — La courbe C_1 est la podaire de C, l'origine O étant prise pour pôle.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{y - px}{p^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{p(px - y)}{p^2 + 1}.$$

On en tire

$$p_1 = \frac{p^2 x - 2py - x}{2px + p^2 y - y}.$$

La valeur de p_1 est encore indépendante de $\frac{dp}{dx}$, et, par conséquent, on ne peut arriver ainsi à déterminer le rayon de courbure; mais on peut donner à p_1 la forme suivante :

$$p_1 = \frac{x_1 - \frac{x}{2}}{\frac{y}{2} - y_1}; \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{p_1} = \frac{y_1 - \frac{y}{2}}{x_1 - \frac{x}{2}},$$

ce qui nous donne ce théorème connu : *La normale à la podaire passe par le milieu du rayon vecteur* OM.

17. *Douzième transformation.* — On obtient M_1 en abaissant du point O une perpendiculaire sur MN jusqu'à la rencontre de cette droite. La courbe C_1 est, par conséquent, la podaire de la développée de C, le point O étant pris pour pôle.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{p(py+x)}{p^2+1}, \quad x_1 = \frac{py+x}{p^2+1}.$$

On en pourrait conclure la valeur du rayon de courbure par un calcul pareil à celui que nous avons effectué jusqu'à présent; mais, si nous appliquons le théorème que nous venons de rappeler, nous voyons que, ω étant le centre de courbure cherché, M_1N_1 passera par le milieu de $O\omega$. De là cette construction géométrique très-simple: mener par le point O une droite qui forme, avec OM_1 et M_1N_1, un triangle isoscèle en O et M_1; le point où cette droite rencontrera MN sera le centre de courbure cherché.

18. *Treizième transformation.* — Sur la tangente TM, on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM_1 = a$.

Les formules sont

$$y_1 = y + a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x + a\frac{1}{\sqrt{1+p^2}};$$

d'où

$$p_1 = \frac{p(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + a\dfrac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - ap\dfrac{dp}{dx}} = \frac{p+\dfrac{a}{\rho}}{1-a\dfrac{p}{\rho}},$$

$$\rho = a\frac{1+pp_1}{p_1-p} = a\cot(\alpha_1-\alpha).$$

Ceci nous montre que *la normale en* M_1 *rencontre la normale* MN *à la courbe* C *au centre de courbure cherché*. Ce théorème est de M. Nicolaïdès; il l'a énoncé comme question dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1866, p. 383.

19. *Quatorzième transformation.* — Sur la normale MN, on porte, à partir du point M, une longueur constante $MM_1 = a$.

Nous aurons pour formules

$$y_1 = y + a\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x - a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en tire

$$p_1 = p;$$

c'est le cas que nous avons indiqué plus haut, où les deux courbes sont parallèles. Là encore il est impossible de déterminer le rayon de courbure, et l'on retrouve cette propriété bien connue, que les tangentes en deux points correspondants sont parallèles.

20. *Quinzième transformation.* — Sur la tangente TM, on porte une longueur constante $TM_1 = a$, à partir du point T.

Les formules sont

$$y_1 = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x_1 = x - \frac{y}{p} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en déduit

$$p_1 = \frac{\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{y}{p^2} - \dfrac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Ce mode de transformation ne permet donc pas non plus de déterminer le rayon de courbure. Cette valeur de p_1 peut prendre la forme

$$\frac{py_1}{y(1+p^2)-p^2y_1},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$y\left(p+\frac{1}{p}\right)=y_1\left(p+\frac{1}{p_1}\right).$$

Si l'on mène M_1N_2 parallèle à MN jusqu'à la rencontre de l'axe des x, il viendra donc

$$T_1N_2 = TN.$$

21. *Seizième transformation.* — Sur la normale NM, on porte, à partir du point N, une longueur constante $NM_1 = a$.

Les formules sont

$$y_1=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},\quad x_1=x+py-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On en tire

$$p_1=-\frac{\dfrac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{dp}{dx}}{1+p^2+\left[y-\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\dfrac{dp}{dx}}$$

$$=-\frac{ap}{\rho(1+p^2)+y(1+p^2)^{\frac{3}{2}}-a},$$

$$\rho=a\frac{p_1-p}{p_1(1+p^2)}-y\sqrt{1+p^2}=a\cos\alpha\frac{\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin\alpha_1}-\frac{y}{\cos\alpha}.$$

Cela donne lieu à la construction suivante : construire l'intersection K de M_1N_1 avec une parallèle NK à l'axe des y, menée par le point N, et projeter le point K sur MN_1 en ω. Le point ω sera le centre de courbure cherché.

22. Les divers exemples que nous avons donnés montrent assez combien la méthode graphique étudiée est générale, et comment elle se prête à des variétés nombreuses. Chaque fois qu'elle se trouve en défaut, on arrive à des théorèmes exprimant une relation entre la tangente à la transformée C_1 et la tangente à la courbe donnée C.

En appliquant à des courbes connues les diverses transformations étudiées, on obtiendrait un grand nombre de résultats particuliers. On pourrait également imaginer bien d'autres modes de transformation ; mais il nous suffit ici d'avoir indiqué quelques-uns des procédés généraux.