

L. PAINVIN

Note sur la méthode d'élimination de Bezout

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 278-285

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__278_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE BEZOUT;

PAR M. L. PAINVIN.

Le principe de la méthode d'élimination de Bezout (*) conduit, dans le cas de deux équations, à une règle simple qu'on peut énoncer ainsi :

« Soient d'abord deux équations du même degré

$$(1) \quad A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2) \quad B = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0;$$

(*) *Théorie générale des équations algébriques*, par BEZOUT, p. 300. La méthode indiquée par Bezout à l'endroit cité est identique avec la méthode d'Euler; mais il est facile de voir que la règle énoncée peut se ramener à la règle qu'on donne habituellement.

on forme les combinaisons suivantes des deux équations données :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} b_0 A - a_0 B = 0, \\ (b_0 x + b_1) A - (a_0 x + a_1) B = 0, \\ (b_0 x^2 + b_1 x + b_2) A - (a_0 x^2 + a_1 x + a_2) B = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \dots + b_{m-1}) A \\ \quad - (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \dots + a_{m-1}) B = 0; \end{array} \right.$$

on a ainsi m équations du $(m-1)^{i\grave{e}me}$ degré; le *résultat* des équations (1) et (2) s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant du système formé par ces m équations.

» Si les équations proposées sont de degrés différents, soit, par exemple,

$$(1') \quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2') \quad b_n x^{m-n} + b_{n+1} x^{m-n-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0,$$

on complétera la seconde équation par l'adjonction des termes

$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{n-1} x^{m-n+1},$$

en supposant

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0,$$

et l'on appliquera la règle précédente. Seulement il faudra supprimer, dans le résultat obtenu, le facteur étranger α_0^n qui se présente à cause de l'introduction de n racines infinies par la modification apportée à l'équation (2'). »

2. Cette règle donne l'équation finale sous la forme d'un déterminant; on a fait peu de remarques sur la loi de formation de ses différents termes, et ces remarques, déduites d'ailleurs par analogie, ne conduisent pas à

l'expression explicite d'un élément quelconque de ce déterminant.

Habituellement on établit deux règles différentes, suivant que les équations proposées sont ou ne sont pas du même degré; l'énoncé que j'ai donné ramène la méthode d'élimination à une règle unique.

Je me propose de faire connaître l'expression explicite d'un quelconque des éléments du déterminant-résultant; on aura alors une formule générale qui permettra d'écrire le résultant sans avoir à refaire, pour chaque cas, les calculs indiqués dans les combinaisons (3).

3. La règle énoncée en commençant conduit à m équations du degré $(m - 1)$; les éléments du déterminant-résultant seront les coefficients des diverses puissances de x dans ces équations ordonnées.

Les éléments de la ligne de rang p seront les coefficients de la $p^{ième}$ des équations (3), savoir :

$$(b_0 x^{p-1} + b_1 x^{p-2} + \dots + b_{p-1}) A \\ - (a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + b_{p-1}) B = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left. \begin{aligned} (b_0 x^{p-1} + b_1 x^{p-2} + \dots + b_{p-1}) [(a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-1}) x^{m-p+1} \\ + a_p x^{m-p} + \dots + a_m] \\ - (a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-1}) [(b_0 x^{p-1} + b_1 x^{p-2} + \dots + b_{p-1}) x^{m-p+1} \\ + b_p x^{m-p} + \dots + b_m] \end{aligned} \right\} = 0;$$

elle se réduit visiblement à

$$(4) \left\{ \begin{aligned} (a_p x^{m-p} + a_{p+1} x^{m-p-1} + \dots + a_m) (b_0 x^{p-1} + b_1 x^{p-2} + \dots + b_{p-1}) \\ - (b_p x^{m-p} + b_{p+1} x^{m-p-1} + \dots + b_m) (a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-1}) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Le terme de rang q , dans la ligne de rang p , sera le coefficient de x^{m-q} dans l'équation (4). Pour obtenir ce terme, considérons, dans l'équation (4), le premier pro-

duit; renversons l'ordre des termes du multiplicande, et écrivons le premier terme $b_0 x^{p-1}$ du multiplicateur au-dessous du terme de degré $(m - p - q + 1)$ dans le multiplicande, ce qui donne la disposition

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_m + & . & + & a_{p+q-1} x^{m-p-q+1} + & . & + & a_q x^{m-q} + \dots + a_p x^{m-p}, \\ & & & b_0 x^{p-1} & & + \dots + & b_{p-1}. \end{array} \right.$$

Le coefficient de x^{m-q} sera la somme des coefficients des termes qui se correspondent verticalement.

Or, si l'on pose

$$(6) \quad A_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

et si l'on désigne par α_{pq} le coefficient du terme de rang q dans la $p^{i\text{ème}}$ des équations (3), on aura évidemment, d'après ce qui vient d'être dit,

$$(7) \quad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + A_{p+q-3,2} + \dots + A_{q,p-1}.$$

On voit que, si $p + q - 1 > m$, il n'y aura pas de termes du multiplicande placés au-dessus des termes $b_0 x^{p-1}, b_1 x^{p-2}, \dots$ du multiplicateur, puisque le premier terme à gauche du multiplicande est a_m ; le premier terme de la somme α_{pq} sera donc celui pour lequel le premier indice est au plus égal à m .

On remarque encore que le second indice du dernier terme de α_{pq} n'est jamais supérieur à $(p - 1)$; si p est inférieur à q , ce dernier terme existera dans α_{pq} ; si p est supérieur à q , les derniers termes de α_{pq} seront nuls; le premier des termes non nuls, en s'avancant vers la gauche, sera $A_{p,q-1}$. D'ailleurs on peut ne pas se préoccuper des derniers termes de α_{pq} , car, lorsque p est supérieur à q , les termes écrits d'après la loi de formation indiquée dans la formule (7) et se trouvant au delà de

$A_{p,q-1}$ se détruiront identiquement ; ils sont, en effet,

$$A_{p-1,q} + A_{p-2,q+1} + A_{p-3,q+2} + \dots + A_{q+2,p-3} + A_{q+1,p-2} + A_{q,p-1} ;$$

or il est visible que $A_{ij} = -A_{ji}$; donc...

4. Il résulte de ce qui précède la formule générale suivante :

Étant données les deux équations

$$(I) \quad \begin{cases} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0, \\ b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = 0, \end{cases}$$

si l'on pose

$$(II) \quad A_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

puis

$$(III) \quad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + A_{p+q-3,2} + \dots + A_{q,p-1},$$

le résultat de l'élimination de x entre les deux équations (I) sera

$$(IV) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

REMARQUE I. — Dans la formule (III), les premiers indices ne doivent jamais être supérieurs à m : on devra donc omettre les termes dans lesquels le premier indice est plus grand que m . Le deuxième indice n'est jamais supérieur à $p-1$. La somme des deux indices est égale à $(p+q-1)$.

REMARQUE II. — Lorsque les équations (I) ne sont pas du même degré, si la seconde, par exemple, est

$$b_n x^{m-n} + b_{n+1} x^{m-n-1} + \dots + b_m = 0,$$

on peut toujours appliquer la formule générale qui précède en introduisant les hypothèses .

$$b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0;$$

seulement il faudra supprimer le facteur a_0^n qui se présentera dans l'équation (IV) et qui est étranger à la question.

REMARQUE III. — Le déterminant (IV) est un déterminant symétrique, c'est-à-dire que

$$(V) \quad \alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

On a, effet,

$$(1^0) \quad \alpha_{pq} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + \dots + A_{q,p-1};$$

$$(2^0) \quad \alpha_{qp} = A_{q+p-1,0} + A_{q+p-2,1} + \dots + A_{p,q-1}.$$

Supposons, par exemple, $p > q$; les premiers termes des expressions (1°) et (2°) sont évidemment égaux jusqu'au terme $A_{p,q-1}$, inclusivement, qui est le dernier terme de α_{qp} ; à partir de là, les termes restants dans α_{pq} sont

$$A_{p-1,q} + A_{p-2,q+1} + A_{p-3,q+2} + \dots + A_{q+2,p-3} + A_{q+1,p-2} + A_{q,p-1};$$

Or cette somme est évidemment nulle, puisque $A_{ij} = -A_{ji}$; donc $\alpha_{qp} = \alpha_{pq}$.

5. Appliquons cette règle au système des deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0, \\ b_0 x^6 + b_1 x^5 + b_2 x^4 + b_3 x^3 + b_4 x^2 + b_5 x + b_6 = 0. \end{cases}$$

La formule (III) donne, immédiatement et sans calcul,

$$\alpha_{11} = A_{10},$$

$$\alpha_{12} = A_{20}, \quad \alpha_{22} = A_{30} + A_{21},$$

$$\alpha_{13} = A_{30}, \quad \alpha_{23} = A_{40} + A_{31}, \quad \alpha_{33} = A_{50} + A_{41} + A_{32},$$

$$\alpha_{14} = A_{40}, \quad \alpha_{24} = A_{50} + A_{41}, \quad \alpha_{34} = A_{60} + A_{51} + A_{42},$$

$$\alpha_{15} = A_{50}, \quad \alpha_{25} = A_{60} + A_{51}, \quad \alpha_{35} = \quad + A_{61} + A_{52},$$

$$\alpha_{16} = A_{60}; \quad \alpha_{26} = \quad + A_{61}; \quad \alpha_{36} = \quad + A_{62};$$

$$\alpha_{44} = A_{61} + A_{52} + A_{43},$$

$$\alpha_{45} = \quad + A_{62} + A_{53}, \quad \alpha_{55} = A_{63} + A_{54},$$

$$\alpha_{46} = \quad + A_{63}; \quad \alpha_{56} = \quad + A_{64}, \quad \alpha_{66} = A_{65}.$$

Le résultat de l'élimination est donc

$$(2) \begin{vmatrix} A_{10} & A_{20} & A_{30} & A_{40} & A_{50} & A_{60} \\ A_{20} & A_{30} + A_{21} & A_{40} + A_{31} & A_{50} + A_{41} & A_{60} + A_{51} & A_{61} \\ A_{30} & A_{40} + A_{31} & A_{50} + A_{41} + A_{32} & A_{60} + A_{51} + A_{42} & A_{61} + A_{52} & A_{62} \\ A_{40} & A_{50} + A_{41} & A_{60} + A_{51} + A_{42} & A_{61} + A_{52} + A_{43} & A_{62} + A_{53} & A_{63} \\ A_{50} & A_{60} + A_{51} & A_{61} + A_{52} & A_{62} + A_{53} & A_{63} + A_{54} & A_{64} \\ A_{60} & + A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Maintenant supposons, par exemple,

$$(3) \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0,$$

on a, dans ce cas,

$$(4) \quad \begin{cases} A_{10} = 0, & A_{20} = 0, & A_{12} = 0, \\ A_{k0} = -a_0 b_k, & A_{k1} = -a_1 b_k, & A_{k2} = -a_2 b_k, \end{cases} \text{ où } k > 2.$$

Introduisons ces hypothèses dans le résultant (2); on peut d'abord diviser la première ligne et la première colonne par $-a_0$; après cette suppression, ajoutons à la seconde ligne la première multipliée par a_1 , on pourra encore diviser la seconde ligne par $-a_0$, et l'on obtiendra comme résultat définitif, après avoir ajouté à la seconde colonne la première multipliée par a_1 :

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_3 & -a_0 b_4 & -a_0 b_5 - a_1 b_4 - a_2 b_3 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 \\ b_4 & -a_0 b_5 & -a_0 b_6 - a_1 b_5 - a_2 b_4 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 + A_{43} & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} \\ b_5 & -a_0 b_6 & -a_1 b_6 - a_2 b_5 & -a_2 b_6 + A_{53} & A_{63} + A_{54} & A_{64} \\ b_6 & 0 & -a_2 b_6 & A_{63} & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, qu'on pourrait encore simplifier en combinant les lignes et les colonnes, est le résultant

des deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose $b_3 = 0$, on pourra diviser de nouveau par $-a_0$, et le déterminant (5), simplifié par l'addition convenable des lignes et des colonnes, se réduit à

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & b_4 & -a_0b_5 + a_1b_4 & -a_0b_6 + a_2b_4 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & -a_0b_6 + a_2b_4 & -a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 & 0 & -a_3b_6 + A_{54} & A_{64} \\ b_6 & 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (7) est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$(8) \quad \begin{cases} a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0, \\ b_4x^2 + b_5x + b_6 = 0. \end{cases}$$