

CHEVILLIET

**Note sur le développement en série de arc
 $\sin x$ au moyen de la formule de MacLaurin**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 209-212

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__209_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE $\arcsin x$ AU MOYEN DE LA FORMULE DE MACLAURIN;

PAR M. CHEVILLIET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Il suffit de considérer le cas où x est positif.

On connaît la loi des coefficients; car, si l'on pose

$$f(x) = \arcsin x,$$

on a, en général (BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 146),

$$\frac{f^{2n}(0)}{1.2.3\dots 2n} = 0, \quad \frac{f^{2n-1}(0)}{1.2.3\dots(2n-1)} = \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)} \frac{1}{2n-1},$$

ce qui permet d'écrire

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots + R,$$

où

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\dots n} f^{n+1}(\theta x),$$

en adoptant la troisième forme du reste; n est l'exposant de x dans le terme qui précède immédiatement R .

$f^{n+1}(\theta x)$ est donné par la formule (*ibid.*, p. 144)

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}} \\ &\times \left[1 - \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right. \\ &+ \frac{1.3}{1.2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \\ &- \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3 + \dots \\ &\mp \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-1} \\ &\pm \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-2} \\ &\mp \left. \frac{1.3}{1.2} \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-1} \pm \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \right], \end{aligned}$$

le signe supérieur correspondant au cas où n est pair, et le signe inférieur à celui où il est impair. Ici n est impair; par conséquent, il faut prendre le signe inférieur. On a donc

$$\begin{aligned} R &= \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x} \right) \frac{x}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}} \\ &\times \left[1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\theta x}{1+\theta x} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Si n augmente indéfiniment, le premier facteur tend vers zéro, car son inverse

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{1} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &> 1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \end{aligned}$$

augmente indéfiniment. Le deuxième a aussi pour limite zéro, si x est inférieur à l'unité, ce qu'on doit supposer pour que la série soit convergente. Le troisième facteur reste fini.

Le quatrième également, comme nous allons essayer de le prouver. D'abord il est facile de voir, comme M. Bertrand l'a déjà montré (*ibid.*, p. 144), que les coefficients des différents termes dont il se compose vont en diminuant en valeur absolue jusqu'au milieu. Cela posé, nous disons que :

Si dans le polynôme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_0 - A_1 z + A_2 z^2 - \dots \pm A_n z^n \mp A_{n+1} z^{n+1} + \dots \\ &\quad - A_2 z^{2n-1} + A_1 z^{2n} - A_0 z^{2n+1}, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients positifs $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ vont en diminuant, z est positif et < 1 , la valeur de ce polynôme est moindre que A_0 .

On peut en effet mettre (1) sous la forme

$$A_0(1 - z^{2n+1}) - A_1 z(1 - z^{2n-1}) + A_2 z^2(1 - z^{2n-3}) \dots \pm A_n z^n(1 - z),$$

ou, en mettant $1 - z$ en facteur commun,

$$(1 - z) [A_0(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n}) \\ - A_1 z(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-2}) \\ + A_2 z^2(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-4}) + \dots - \pm A_n z^n].$$

En ordonnant l'expression entre crochets, on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} A_0 + A_0 \\ - A_1 \\ + A_2 \\ \vdots \\ - A_n \end{array} \right| \begin{array}{l} z + A_0 \\ - A_1 \\ + A_2 \\ \vdots \\ - A_n \end{array} \right| \begin{array}{l} z^2 + \dots + A_0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} z^n + \dots \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \left. \begin{array}{l} + A_0 \\ - A_1 \\ + A_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} z^{2n-2} + A_0 \\ - A_1 \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} z^{2n-1} + A_0 \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} z^{2n} \\ \\ \end{array} \right. \end{array}$$

Or, d'après les hypothèses que nous avons faites, les coefficients des différentes puissances de z sont positifs, et, à l'exception des deux extrêmes, moindres que A_0 , de sorte que l'expression (2) est moindre que

$$A_0(1 + z + z^2 + \dots + z^{2n}),$$

moindre, *a fortiori*, que

$$A_0(1 + z + z^2 + \dots) = \frac{A_0}{1 - z};$$

donc le polynôme (1) est plus petit que A_0 .

(Le cas où $z = 1$ ne fait pas exception, car alors le polynôme est nul).

Dans le cas actuel $A_0 = 1$ et l'on a, par suite,

$$R < \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \left(\frac{x - \theta x}{1 - \theta x} \right)^n \frac{x}{\sqrt{1 - \theta^2 x^2}},$$

14.

qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment; donc

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$