

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 13
(1874), p. 154-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__154_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

•

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

— • —

Question 1064

(voir 2^e série, t. XI, p. 96);

PAR M. C. MOREAU.

On a une courbe fermée, plane et convexe. Si $d\sigma$ désigne un élément superficiel infiniment petit extérieur à la courbe, θ l'angle sous lequel on voit la courbe de cet élément, et t, t' les longueurs des tangentes à la courbe, issues de l'élément, la somme de toutes les quantités $\frac{d\sigma \sin \theta}{tt'}$, se rapportant à tous les éléments $d\sigma$ du plan extérieurs à la courbe, est égale à $2\pi^2$.

(F. DIDON.)

Soient C une courbe fermée, plane et convexe, AB, A'B' deux tangentes qui se coupent au point M sous l'angle θ et qui font respectivement des angles ω et ω' avec un axe fixe quelconque XY situé dans le plan; je mène les deux tangentes infiniment voisines déterminant le quadrilatère élémentaire Mabc que je prends pour valeur de $d\sigma$. Cela posé, $d\omega$ et $d\omega'$ étant supposés tous les deux du premier ordre, on aura, en négligeant les infiniment

petits d'ordre supérieur,

$$d\sigma = Mabc = Ma \cdot Mb \sin \theta,$$

$$Ma = \frac{r' d\omega'}{\sin \theta}, \quad Mb = \frac{r d\omega}{\sin \theta},$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma \sin \theta}{r r'} = d\omega d\omega'.$$

Si maintenant on fait la somme de toutes les quantités telles que $d\omega \cdot d\omega'$, en faisant varier successivement ω et ω' de ω à $2\pi + \omega$ et de ω' à $2\pi + \omega'$, il est clair que chaque élément plan, tel que $Mabc$, aura été pris deux fois, et que, par suite, la somme cherchée sera

$$\sum \frac{d\sigma \sin \theta}{r r'} = \frac{1}{2} \int_{\omega}^{\omega+2\pi} \int_{\omega'}^{\omega'+2\pi} d\omega d\omega' = 2\pi^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1066

(voir 2^e série, t. XI, p. 143);

PAR M. C. MOREAU.

Quelle valeur entière et positive que l'on donne à a et à m , on a

$$a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2 \cdot 3^m} < (a+1)^{2m+3}.$$

(S. REALIS.)

Chassons le dénominateur $2 \cdot 3^m$, les inégalités à démontrer deviennent

$$\begin{aligned} 2a^3(3a^2)^m &< (2a^3 + 3a^2 + a)(3a^2 + 3a + 1)^m \\ &< (2a^3 + 6a^2 + 6a + 2)(3a^2 + 6a + 3)^m, \end{aligned}$$

et, sous cette forme, elles sont évidentes.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey, Kruschwitz et Droiteau, élève du lycée de Moulins.

Question 1076

(voir 2^e série, t. XI, p. 144);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnés une droite et un point, on mène par le point deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné, puis la seconde tangente commune à ces deux cercles. Le lieu du point symétrique du point donné par rapport à cette tangente est un limaçon de Pascal, qui a pour l'un de ses foyers le point donné; l'autre foyer est le point symétrique du point donné, par rapport à la droite donnée.

(H. FAURE.)

Soient O et DD' le point et la droite donnés, d leur distance et 2α l'angle constant formé par les rayons menés du point O aux centres de deux circonférences conjuguées.

Je prends le point O pour pôle et la perpendiculaire menée de ce point à DD', mais prolongée en sens contraire, pour axe polaire.

Les centres des cercles sont situés sur une parabole ayant le point O pour foyer et la droite DD' pour directrice; la droite qui joint les centres de deux cercles conjugués est vue du foyer O sous un angle constant 2α : elle enveloppe donc une ellipse ayant le point O pour foyer (PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, n° 480). On aura les extrémités du grand axe en cherchant les points où l'axe polaire est rencontré par la ligne des centres quand elle est parallèle à la droite DD', c'est-à-dire quand les circonférences conjuguées ont même rayon.

On a alors

$$r_1 = d + r_1 \cos \alpha,$$

$$r_2 = d - r_2 \cos \alpha,$$

d'où

$$r_1 \cos \alpha = \frac{d \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = a + c,$$

$$r_2 \cos \alpha = \frac{d \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = a - c,$$

$$a = \frac{d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad c = \frac{d \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$2a$ et $2c$ désignant respectivement le grand axe et la distance des foyers.

Le lieu des symétriques du point O, par rapport à toutes les tangentes à l'ellipse, c'est-à-dire le lieu des seconds points d'intersection des circonférences conjuguées, est le cercle directeur décrit du second foyer. Si l'on nomme r et θ les coordonnées polaires d'un point du lieu cherché, la corde commune des deux circonférences conjuguées correspondantes fait, avec l'axe polaire, l'angle $\frac{\theta}{2}$, et, en appelant δ sa longueur, on a

$$4a^2 = 4c^2 + \delta^2 - 4c\delta \cos \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$\delta = 2c \cos \frac{\theta}{2} \pm 2 \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

La distance du point O à la seconde tangente commune est égale, par raison de symétrie, à la distance du second point d'intersection des deux circonférences à la droite DD', c'est-à-dire à

$$\delta \cos \frac{\theta}{2} + d.$$

Le rayon vecteur r est le double de cette distance; donc l'équation du lieu cherché est

$$r = 4c \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm 4 \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + 2d,$$

équation qui devient, en faisant disparaître le radical et ayant égard aux valeurs de a et de c ,

$$(1) \quad r^2 - 4cr \cos \theta - 4(c+d)r + 4d^2 = 0.$$

Si l'on transporte le pôle au point O' , symétrique du point O par rapport à la droite DD' , on obtient l'équation

$$(2) \quad r = 4(c+d) \cos \theta \pm 4 \sqrt{c(c+d)},$$

ou

$$r = \frac{4d}{\sin^2 \alpha} \cos \theta = \frac{4d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

qui représente bien un limaçon de Pascal, ayant pour pôle la nouvelle origine (*).

Il est clair que le lieu des projections du point O sur les tangentes communes serait un autre limaçon de Pascal, ayant pour foyer la projection du point O sur DD' .

Note du Rédacteur. — Pour résoudre cette question par la Géométrie élémentaire, je nommerai C, C' les centres des deux cercles; D, D' les points auxquels ils touchent la droite donnée; G le point d'intersection de la droite des centres et de la tangente commune donnée DD' ; GH la seconde tangente commune; AO, AM les perpendiculaires abaissées du point donné A sur les deux tangentes GH, GD ; O', M' les points symétriques de A , par rapport à ces deux droites, et enfin 2α l'angle donné CAC' .

Les distances GC, GC' étant proportionnelles aux rayons AC, AC' , la droite GA est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle CAC' ; il en résulte que l'angle GAC est le complément de α .

Les triangles GAC, GDC donnent

$$AC = CG \frac{\sin AGC}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad CD = CG \sin CGD,$$

donc

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{\sin AGC}{\sin CGD};$$

(*) M. Maurice Cabart, garde général des forêts, a aussi trouvé l'équation d'un limaçon de Pascal, au moyen de plusieurs transformations successives de coordonnées.

mais, la ligne GC étant bissectrice de l'angle OGM des tangentes, on a

$$AGC = \pm \frac{1}{2} (AGM - AGO) = \pm \frac{1}{2} (AOM - AMO)$$

et

$$CGM = \frac{1}{2} (AGM + AGO) = \frac{1}{2} (AOM + AMO);$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{\sin \frac{1}{2} (AOM - AMO)}{\sin \frac{1}{2} (AOM + AMO)} \\ &= \pm \frac{\sin AOM - \sin AMO}{\sin OAM} = \pm \frac{AM - AO}{MO}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad AM \pm MO \cos \alpha = AO,$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad AM' \pm M'O' \cos \alpha = AO'.$$

Cette dernière égalité montre que le lieu du point O' est un limaçon de Pascal, dont les points A et M' sont les foyers.

Remarque. — L'équation (2) représente, en coordonnées bipolaires, le lieu du point O'. Il est facile d'en déduire l'équation de ce lieu en prenant pour coordonnées le rayon vecteur M'O' = ρ , et l'angle O'M'A = ω que ce rayon vecteur forme avec l'axe polaire M'A; car, dans le triangle AM'O', on a, en designant par $2d$ le côté AM',

$$\overline{AO'}^2 = 4d^2 + \rho^2 - 4d\rho \cos \omega.$$

D'autre part, l'équation (2) donne

$$AO'^2 = 4d^2 + \rho^2 \cos^2 \alpha \pm 4d\rho \cos \alpha;$$

donc

$$\rho^2 - 4d\rho \cos \omega = \rho^2 \cos^2 \alpha \pm 4d\rho \cos \alpha,$$

ou

$$\rho = \frac{4d \cos \omega}{\sin^2 \alpha} \pm \frac{4d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

(G.).