

LOUIS SALTEL

Théorèmes sur les coniques et sur les surfaces de second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12 (1873), p. 89-92

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_89_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_89_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES ET SUR LES SURFACES DE SECOND ORDRE;

PAR M. LOUIS SALTEL.

I.

Prenons à volonté une conique S définie par cinq points $P, A, B, 1, 2$; menons les rayons $(P1), (P2)$, et imaginons les cercles $(AB1), (AB2)$; soient $1'$ et 2 leurs seconds points d'intersection avec ces rayons; si l'on considère le cercle Σ défini par les trois points $P, 1', 2'$, on peut énoncer les divers théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Par les points A, B , faites passer un cercle arbitraire λ , qui coupe le cercle Σ en a, b ; menez les rayons PA, PB , et soient A', B' les seconds points d'intersection de ces rayons avec le cercle λ : les points A', B' sont deux points de la conique S .*

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire la conique S définie par cinq points.

THÉORÈME II. — *Si l'on joint les points de rencontre de la droite AB avec le cercle Σ au point P , les deux droites ainsi obtenues sont les directions asymptotiques de la conique S . Conséquemment, la conique S sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite AB rencontrera, touchera ou ne rencontrera pas le cercle Σ .*

Remarque. — Ce théorème donne une solution immédiate de ces trois problèmes :

1° *Étant donnés cinq points d'une conique, déterminer la forme de la courbe sans la construire.*

2° *Construire une parabole, connaissant quatre points.*

3° *Construire une hyperbole équilatère, connaissant quatre points.*

THÉORÈME III. — 1° *La tangente à la conique S en l'un des points A, B, au point A, par exemple, est la tangente en ce point au cercle passant par les points A, B et par le second point de rencontre du cercle Σ avec PA. 2° La tangente en P est la droite qui passe par le second point de rencontre des deux cercles Σ et (PAB).*

Nota. — Si l'on joint deux à deux les points de rencontre des tangentes en A, B, P au milieu des cordes déterminées par les mêmes points, les droites obtenues passeront par le centre; de là la détermination de ce point.

Remarque. — Les trois points P, A, B étant quelconques, il résulte du théorème précédent la construction de la tangente en un point quelconque de S.

THÉORÈME IV. — *Les bissectrices des angles des deux droites AB, A'B' sont les directions des axes de la courbe.*

Remarque. — Pour obtenir la grandeur des axes, on n'aura, d'après ce théorème, qu'à recourir à la solution de ce problème :

Une conique étant définie par cinq points, trouver son intersection avec une droite.

THÉORÈME V. — *Si l'on suppose les deux points A, B confondus en A suivant la direction AB, le cercle tangent en A à cette droite et passant par le second point*

de rencontre de PA avec Σ est le cercle osculateur en ce point de la courbe.

Remarque. — L'hypothèse que l'on vient de faire étant toujours possible, d'après le théorème III, il en résulte la construction suivante du cercle osculateur en un point A d'une conique définie par ce point, sa tangente AT et trois points P, 1, 2 :

RÈGLE. — *Par chacun des points 1, 2, menez le cercle tangent en A à la droite AT; soient 1', 2' les seconds points d'intersection de ces cercles avec (P 1), (P 2); le cercle osculateur en A est le cercle tangent en ce point à AB, et passant par le second point de rencontre du cercle (P 1' 2') avec la droite PA.*

II.

Prenons à volonté dans l'espace une surface du second ordre V, définie par une section circulaire C et quatre points P, 1, 2, 3; menons les rayons (P 1), (P 2), (P 3), et imaginons les sphères déterminées par le cercle C et par les points 1, 2, 3; soient 1', 2', 3' leurs seconds points d'intersection avec ces sphères; si l'on considère la sphère Σ déterminée par les quatre points P, 1', 2', 3', on peut énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Par le cercle C, faites passer une sphère quelconque A, coupant la sphère Σ suivant un cercle C_1 ; menez le cône qui a pour sommet le point P et pour base le cercle C_1 , et soit C' le second cercle d'intersection de ce cône avec la sphère λ : le cercle C' est une nouvelle section circulaire de la surface V.*

THÉORÈME II. — *Le cône qui a pour sommet le point P et pour base le cercle d'intersection du plan C avec la sphère Σ est le cône asymptotique de la surface, conséquemment, la surface V est un hyperboloïde, un paraboloïde.*

loïde elliptique ou un ellipsoïde, suivant que le plan du cercle C rencontre, touche ou ne rencontre pas la sphère Σ .

Remarque. — Ce théorème donne une solution de ce problème :

Construire un parabolôïde elliptique défini par une section circulaire et trois points.

La solution de ce problème revient à construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan donné.

THÉORÈME III. — *Le plan tangent en P à la surface V est le plan d'intersection de la sphère Σ et de la sphère (CP).*

Remarque. — Ce théorème enseigne à construire le plan tangent en un point quelconque de la surface.

THÉORÈME IV. — *Les plans bissecteurs des plans des deux cercles C, C' sont deux plans parallèles à deux plans principaux de la surface.*