NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Théorèmes sur les combinaisons

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12 (1873), p. 84-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__84_1>

THÉORÈMES SUR LES COMBINAISONS;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

1. Nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, par K_m^n le nombre des combinaisons complètes, et par C_m^n le nombre des combinaisons simples de m objets n à n.

Nous représenterons par $\left(\frac{p}{q}\right)$ la partie entière du quotient de p par q.

Enfin nous nous appuierons sur ce fait bien connu, que le nombre x, qui exprime combien de fois le nombre premier p entre comme facteur dans le produit $1.2.3...n$, est donné par la formule

$$x = \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p^2}\right) + \left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots$$

II.

2. THÉORÈME. — *Si* $m-1$ *et* $n+1$ *sont premiers entre eux,* K_m^n *est divisible par* $n+1$.

Ceci revient à démontrer que, dans le cas où $m-1$ et

$n+1$ sont premiers entre eux, le quotient

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

est un nombre entier.

Il suffit pour cela d'établir que, dans ce cas, tout nombre premier p, qui entre au dénominateur, entre au numérateur au moins le même nombre de fois.

Le nombre premier p entre au numérateur un nombre x de fois donné par la formule

$$x=\left(\frac{m+n-1}{p}\right)+\left(\frac{m+n-1}{p^2}\right)+\left(\frac{m+n-1}{p^3}\right)+\ldots$$
$$-\left(\frac{m-1}{p}\right)-\left(\frac{m-1}{p^2}\right)-\left(\frac{m-1}{p^3}\right)-\ldots.$$

Le même nombre premier p entre au dénominateur un nombre y de fois donné par la formule

$$y=\left(\frac{n+1}{p}\right)+\left(\frac{n+1}{p^2}\right)+\left(\frac{n+1}{p^3}\right)+\ldots.$$

Donc il suffit de prouver que, quand $m-1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, on a, pour toute valeur de ∂ entière et supérieure à l'unité,

$$\left(\frac{m+n-1}{\partial}\right)-\left(\frac{m-1}{\partial}\right)\geq\left(\frac{n+1}{\partial}\right),$$

ou bien

$$\left(\frac{m+n-1}{\partial}\right)\geq\left(\frac{m-1}{\partial}\right)+\left(\frac{n+1}{\partial}\right).$$

Divisons $m-1$ et $n+1$ par ∂. Soient M, N les quotients; μ et ν les restes. Nous aurons

$$m-1=M\partial+\mu,$$
$$n+1=N\partial+\nu.$$

L'inégalité précédente revient alors à celle-ci :

$$\left(\frac{M\delta + N\delta + \mu + \nu - 1}{\delta}\right) \geq \left(\frac{M\delta + \mu}{\delta}\right) + \left(\frac{N\delta + \nu}{\delta}\right).$$

Or, si $m - 1$ et $n + 1$ sont premiers entre eux, μ et ν ne sont pas nuls en même temps; donc $\mu + \nu - 1$ est supérieur ou égal à zéro; donc la partie entière du premier quotient est, au moins, $M + N$, c'est-à-dire au moins égale à la somme des parties entières des deux derniers quotients. L'inégalité est donc satisfaite, et le théorème démontré.

3. Théorème. — *Si m et n sont premiers entre eux,* K_m^n *est divisible par m.*

En effet on a, identiquement,

$$\frac{K_m^n}{m} = \frac{K_{m+1}^{n-1}}{n}.$$

Or, puisque m et n sont premiers entre eux, K_{m+1}^{n-1}, d'après le théorème précédent, est divisible par n. Donc le second membre de l'identité précédente est entier. Donc le premier l'est aussi. Donc K_m^n est divisible par m.

4. Théorème. — *Si* $m - 1$ *et n sont premiers entre eux,* K_m^n *est divisible par* $m + n - 1$.

En effet on a, identiquement,

$$\frac{K_m^n}{m + n - 1} = \frac{K_m^{n-1}}{n}.$$

Or, puisque $m - 1$ et n sont premiers entre eux, d'après le premier théorème, K_m^{n-1} est divisible par n. Donc le second membre de l'égalité précédente est entier. Donc le premier l'est aussi. Donc K_m^n est divisible par $m + n - 1$.

III.

5. Théorème. — *Si* $m+1$ *et* $n+1$ *sont premiers entre eux*, C_m^n *est divisible par* $n+1$.

Pour le démontrer, nous partirons de l'identité

$$C_m^n = K_{m-n+1}^n.$$

Or, si $m+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, $m-n$ et $n+1$ le sont aussi. Donc, d'après le premier théorème, K_{m-n+1}^n est divisible par $n+1$. Il en est donc de même de C_m^n, ce qui démontre le théorème.

6. Théorème. — *Si* m *et* n *sont premiers entre eux*, C_m^n *est divisible par* m.

En effet on a, identiquement,

$$\frac{C_m^n}{m} = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{n}.$$

Or, si m et n sont premiers entre eux, d'après le théorème qui précède immédiatement, C_{m-1}^{n-1} est divisible par n. Le second membre est entier. Le premier l'est donc aussi, et C_m^n est divisible par m.

7. Théorème.— *Si* $m+1$ *et* n *sont premiers entre eux*, C_m^n *est divisible par* $m-n+1$.

En effet on a, identiquement,

$$\frac{C_m^n}{m-n+1} = \frac{C_m^{n-1}}{n}.$$

Or, si $m+1$ et n sont premiers entre eux, C_m^{n-1}, d'après le premier théorème relatif aux combinaisons simples, est divisible par n. Le second membre de l'identité est entier. Le premier l'est aussi. Donc C_m^n est divisible par $m-n+1$.

IV.

8. Le premier des six théorèmes qui précèdent a été démontré directement; les cinq autres en ont été déduits par la considération de certaines identités.

Ces mêmes identités peuvent servir à démontrer séparément chacun de ces six théorèmes, d'une façon fort indirecte, il est vrai, mais très-facile et surtout très-rapide. Nous nous contenterons de donner, comme exemple, la démonstration du premier théorème.

Reprenons, pour cela, l'identité employée au n° 3. Elle peut s'écrire

$$\frac{K_{m-1}^{n+1}}{m-1} = \frac{K_m^n}{n+1},$$

ou bien

$$(n+1)K_{m-1}^{n+1} = (m-1)K_m^n.$$

Or $n+1$ divise le premier membre; donc il divise le second; par suite, s'il est premier avec $m-1$, il divise K_m^n. Donc :

Si $m-1$ *et* $n+1$ *sont premiers entre eux*, K_m^n *est divisible par* $n+1$.

Les cinq autres théorèmes se démontreraient d'une façon analogue.

V.

9. Comme conséquence des propositions précédentes, on peut citer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* $m+1$ *est un nombre premier, chaque coefficient du développement de* $(a+b)^m$, *excepté le dernier, est divisible par son rang.*

En effet, le terme de rang $n+1$ a pour coefficient C_m^n. Or $m+1$, étant premier, est premier avec toutes les va-

leurs de $n + 1$ inférieures à $m + 1$. Donc, d'après le premier théorème sur les combinaisons simples, C_m^n est toujours divisible par $n + 1$, excepté dans le cas où $n = m$.