

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 572-580

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__572_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 944

(voir 2^e série, t. VIII, p. 276);

PAR M. MORET-BLANC.

Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes sont liés par la relation $ab = \text{const.}$ On demande :

- 1^o Le lieu des points d'intersection ;*
- 2^o Le lieu des milieux des tangentes communes.*

Prenons le point fixe pour origine des coordonnées rectangulaires et la tangente donnée pour axe des x , et posons $ab = k^2$.

Les équations des deux ellipses sont

$$(1) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2a^2 b y = 0,$$

$$(2) \quad b^2 y^2 + a^2 x^2 - 2ab^2 y = 0.$$

1° Pour avoir le lieu des points d'intersection, il faut éliminer a et b entre ces deux équations, et

$$(3) \quad ab = k^2.$$

Ajoutant les deux premières, multipliées respectivement par $-b$ et $+a$, on a

$$(a^3 - b^3)x^2 - k^2(a - b)y^2 = 0.$$

Écartons le cas de $a = b$, que nous examinerons à part, et divisons par $(a - b)$; il vient

$$(4) \quad [(a + b)^2 - k^2]x^2 - k^2y^2 = 0,$$

ou

$$(4') \quad (a + b)^2 x^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

Si l'on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on a

$$(a^2 - b^2)(y^2 - x^2) - 2k^2(a - b)y = 0,$$

et, en divisant par $(a - b)$,

$$(5) \quad (a + b)(y^2 - x^2) - 2k^2y = 0.$$

Éliminant enfin $(a + b)$ entre les équations (4') et (5), on a

$$(6) \quad 4k^2x^2y^2 = (y^2 - x^2)^2(x^2 + y^2)$$

pour l'équation du lieu des intersections, ou en coor-

données polaires

$$\begin{aligned} k^2 \sin^2 2\theta &= r^2 \cos^2 2\theta, \\ (7) \quad r &= \pm k \tan 2\theta. \end{aligned}$$

En vertu de l'équation (4), $\frac{y^2}{x^2} = \tan^2 \theta$ a sa valeur minimum pour $a + b$ minimum, ce qui a lieu pour $a = b = k$; alors $\tan^2 \theta = 3$, $\tan \theta = \sqrt{3}$; il en résulte qu'il faut faire varier θ seulement de 60 à 120 degrés; et, comme r ne doit avoir que des valeurs positives, il faut d'abord prendre

$$r = - \tan 2\theta.$$

Pour $\theta = 60^\circ$,

$$r = k\sqrt{3}, \quad x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2};$$

θ croissant de 60 à 90 degrés, r décroît de $k\sqrt{3}$ à 0; puis, $\tan 2\theta$ devenant positive, on prendra la formule

$$r = k \tan 2\theta;$$

θ croissant de 90 à 120 degrés, r croîtra de 0 à $k\sqrt{3}$.

Pour des valeurs supplémentaires de θ , les valeurs de r sont égales; la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y . Elle le sera aussi par rapport à l'axe des x , si l'on construit les ellipses des deux côtés de la droite fixe.

Si l'on fait $a = b$, les deux ellipses se confondent avec la circonférence

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

2° Soit $y = mx + n$ l'équation d'une tangente commune.

En remplaçant y par $mx + n$ dans les équations (1) et (2), elles deviennent

$$\begin{aligned} (a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 m(n - b)x + a^2(n^2 - 2bn) &= 0, \\ (b^2 m^2 + a^2) x^2 + 2b^2 m(n - a)x + b^2(n^2 - 2an) &= 0. \end{aligned}$$

Exprimant que chacune de ces équations a deux racines égales, on a, toutes réductions faites,

$$a^2 m^2 - n^2 + 2bn = 0,$$

$$b^2 m^2 - n^2 + 2an = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$(a^2 - b^2) m^2 = 2(a - b)n, \quad m^2(a + b) = 2n,$$

$$(a^2 - b^2)n^2 - 2(a^3 - b^3)n = 0,$$

$$(a + b)n^2 - 2(a^2 + ab + b^2)n = 0,$$

$$n = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{a + b}, \quad m^2 = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)^2};$$

$n = 0$ donne l'axe des x tangent aux deux ellipses à l'origine.

Les coordonnées des points de contact sont, pour la première ellipse,

$$x' = \frac{a^2 m (b - n)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad y' = \frac{a^2 m^2 b + b^2 n}{a^2 m^2 + b^2},$$

et, pour la seconde,

$$x'' = \frac{b^2 m (a - n)}{b^2 m^2 + a^2}, \quad y'' = \frac{ab^2 m^2 + a^2 n}{b^2 m^2 + a^2}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu cherché sont

$$x = \frac{x + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2},$$

ou

$$x = \frac{a^2 b^2 (a + b - 2n) m^3 + ab (a^3 + b^3) m - (a^4 + b^4) mn}{2(a^2 m^2 + b^2)(b^2 m^2 + a^2)},$$

$$y = \frac{a^2 b^2 (a + b) m^4 + ab (a^3 + b^3) m^2 + (a^4 + b^4) m^2 n + 2a^2 b^2 n}{2(a^2 m^2 + b^2)(b^2 m^2 + a^2)}.$$

Si l'on pose

$$a + b = z, \quad ab = k^2,$$

d'où

$$n = \frac{2(z^2 - k^2)}{z}, \quad m^2 = \frac{4(z^2 - k^2)}{z^2}.$$

les valeurs de x et y deviennent

$$x = \frac{2z^8 - 11k^2z^6 + 27k^4z^4 - 32k^6z^2 + 16k^8}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8} \sqrt{z^2 - k^2},$$

$$y = \frac{(4z^6 - 18k^2z^4 + 28k^4z^2 - 16k^6)(z^2 - k^2)z}{4z^8 - 20k^2z^6 + 41k^4z^4 - 40k^6z^2 + 16k^8},$$

z devant varier de $2k$ à $+\infty$.

L'élimination de z entre ces deux équations conduirait à celle de la courbe, lieu des milieux des tangentes communes; mais, comme cette équation serait fort compliquée, il est plus simple de regarder la courbe comme définie par les deux équations précédentes.

Pour $z = 2k$,

$$x = \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

On peut aussi exprimer x et y en fonction de m . On trouve

$$x = km \frac{(1-m^2)(4-m^2)^2m^2 + (3m^2-8)(4-m^2) - (m^4-8)m^2}{[(m^4+1)(4-m^2)^2 + 2(m^4-8)m^2]\sqrt{4-m^2}},$$

$$y = h \frac{(4-m^2)^2m^4 + (4-m^2)(3m^2-8)m^2 + (m^4-8)m^4 + (4-m^2)^2m^2}{[(m^4+1)(4-m^2)^2 + 2(m^4-8)m^2]\sqrt{4-m^2}},$$

m^2 devant varier depuis sa valeur minimum 3, correspondant à $a = b = k$, jusqu'à sa valeur maximum 4.

Pour $m^2 = 3$,

$$x = \pm \frac{k\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3k}{2}.$$

Pour $m^2 = 4$, x et y sont infinis; mais $\frac{y}{x} = \pm 2$.

Le coefficient angulaire des asymptotes est ± 2 .

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Questions 970 et 1028

(voir 2^e série, t. X, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés correspondants : trouver le lieu des sommets de ces triangles. (F. V.)

Soient

$$(1) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation de l'ellipse donnée, α et β les coordonnées d'un point du lieu. L'équation de la corde de contact des tangentes issues du point (α, β) sera

$$(2) \quad a^2 \beta y + b^2 \alpha x = a^2 b^2.$$

Éliminant successivement y et x entre ces deux équations, on a, pour déterminer les coordonnées des points de contact de ces tangentes, les équations

$$(3) \quad (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2) x^2 - 2 a^2 b^2 \alpha x + a^4 (b^2 - \beta^2) = 0,$$

$$(4) \quad (a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2) y^2 - 2 a^2 b^2 \beta y + b^4 (a^2 - \alpha^2) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a^2 b^2 \alpha \pm a^2 \beta \sqrt{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2}}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2} = \begin{cases} x_1, \\ x_2, \end{cases}$$

$$y = \frac{a^2 b^2 \beta \mp b^2 \alpha \sqrt{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 - a^2 b^2}}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2} = \begin{cases} y_1, \\ y_2. \end{cases}$$

Les tangentes aux points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et les normales aux mêmes points ont respectivement pour équations

$$(5) \quad b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2,$$

$$(6) \quad b^2 x_2 x + a^2 y_2 y = a^2 b^2,$$

$$(7) \quad a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = c^2 x_1 y_1,$$

$$(8) \quad a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = c^2 x_2 y_2.$$

Appelant x', y' les coordonnées du point d'intersection des lignes (6) et (7), et x'', y'' celles du point d'intersection des lignes (5) et (8), ces équations donnent

$$\begin{aligned}x' &= x_1 \frac{a^2 b^4 + a^2 c^2 y_1 y_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = x_1 \frac{(a^2 + c^2) \beta^2 + b^2 \alpha^2 - b^2 c^2}{b^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \\y' &= y_1 \frac{a^4 b^2 - b^2 c^2 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = y_1 \frac{a^2 \beta^2 + (b^2 - c^2) \alpha^2 + a^2 c^2}{a^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \\x'' &= x_2 \frac{a^2 b^4 + a^2 c^2 y_1 y_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = x_2 \frac{(a^2 + c^2) \beta^2 + b^2 \alpha^2 - b^2 c^2}{b^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \\y'' &= y_2 \frac{a^4 b^2 - b^2 c^2 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2 + b^4 x_1 x_2} = y_2 \frac{a^2 \beta^2 + (b^2 - c^2) \alpha^2 + a^2 c^2}{a^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)}.\end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{(a^2 + c^2) \beta^2 + b^2 \alpha^2 - b^2 c^2}{b^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = M, \quad \frac{a^2 \beta^2 + (b^2 - c^2) \alpha^2 + a^2 c^2}{a^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = N,$$

on aura

$$\begin{aligned}x' &= M x_1, & y' &= N y_1, \\x'' &= M x_2, & y'' &= N y_2.\end{aligned}$$

Il faut exprimer que les points (x', y') , (x'', y'') sont sur une même tangente à l'ellipse.

Appelons x_3, y_3 les coordonnées du point de contact, on aura les deux conditions

$$\begin{aligned}a^2 y' y_3 + b^2 x' x_3 &= a^2 b^2, \\a^2 y'' y_3 + b^2 x'' x_3 &= a^2 b^2,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$y_3 = \frac{b^2 (x' - x'')}{x' y'' - x'' y'}, \quad x_3 = \frac{a^2 (y'' - y')}{x' y'' - x'' y'}.$$

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation de l'ellipse, ce qui donne

$$b^2 (x' - x'')^2 + a^2 (y'' - y')^2 = (x' y'' - x'' y')^2,$$

ou

$$(9) \quad b^2 M^2 (x_1 - x_2)^2 + a^2 N^2 (y_2 - y_1)^2 = M^2 N^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Or on a, en posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2} &= R, & a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 &= D, \\ x_1 - x_2 &= \frac{2a^2\beta R}{D}, & y_2 - y_1 &= \frac{2b^2\alpha R}{D}, \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= \frac{2a^2b^2R}{D}.\end{aligned}$$

L'équation (9) devient, en supprimant le facteur $\frac{4a^2b^2R^2}{D^2}$, qui n'est jamais nul,

$$a^2M^2\beta^2 + b^2N^2\alpha^2 = a^2b^2M^2N^2,$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{b^2M^2} + \frac{\beta^2}{a^2N^2} = 1,$$

et enfin, en remettant pour M et N leurs valeurs,

$$\frac{(a^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 b^2 \alpha^2}{[(a^2 + c^2)\beta^2 + b^2\alpha^2 - b^2c^2]^2} = \frac{(a^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 a^2 \beta^2}{[a^2\beta^2 + (b^2 - c^2)\alpha^2 + a^2c^2]^2} = 1.$$

On vérifie sans peine que la normale à l'ellipse, au point (x_3, y_3) , passe par le point (α, β) .

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey.

Seconde solution de la question 1034;

PAR M. L. PAINVIN.

La question 1034 résolue dans un des derniers numéros des *Nouvelles Annales*, même tome, p. 364, peut encore se résoudre de la manière suivante.

Le théorème à démontrer est ainsi énoncé :

On prend sur une surface du second ordre une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle circonscrite à une quelconque des surfaces du second ordre homofocales à la première.

Soit l'équation tangentielle de la surface donnée

$$(1) \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0;$$

l'équation d'une section plane sera

$$(2) \quad f_0(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1) - (a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w - 1)^2 = 0,$$

où u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées fixes du plan sécant, et

$$(2 \text{ bis}) \quad f_0 = a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 + c^2 w_0^2 - 1.$$

Or, si l'on considère la surface

$$(3) \quad f_0(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1) + k(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2 u_0 u + b^2 v_0 v + c^2 w_0 w - 1)^2 = 0,$$

k étant une constante arbitraire, cette surface est évidemment circonscrite à une des homofocales de la surface (1), et elle admet pour focale la courbe plane (2). En effet, pour déterminer les focales d'une surface $F(u, v, w) = 0$, il suffit de déterminer λ de manière que l'équation

$$F(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

représente une courbe plane; or, si l'on applique cette règle à la surface (3), en faisant $\lambda = -k$, on obtient la courbe plane (2); donc, etc.