

G. BELLAVITIS

Exposition de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 529-561

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES

(suite, voir même tome, p. 501);

PAR M. G. BELLAVITIS.

(Traduit de l'italien par M. LAISANT, capitaine du Génie.)

110. PROBLÈME. — *Déterminer le barycentre F du périmètre d'un triangle.*

Le barycentre du côté AB est en son point milieu C°; par suite, la somme géométrique de toutes les droites joignant un point quelconque F à tous les éléments infiniment petits de ce côté, éléments dont le nombre est proportionnel à la longueur c, sera

$$cFC^{\circ} \triangleq \frac{c}{2} (FA + FB).$$

On peut en dire autant pour les deux autres côtés BC = a, CA = b; et, pour que F soit le barycentre de l'ensemble de ces trois côtés, on devra avoir (99)

$$(9) \quad (b + c)FA + (c + a)FB + (a + b)FC \triangleq 0.$$

Pour rendre tout à fait directe et facile la manière d'employer cette équipollence, il convient (au moyen de la règle I) de rapporter tous les points à un point arbitraire O; alors l'équipollence (9) devient

$$2(a + b + c)OF \triangleq (b + c)OA + (c + a)OB + (a + b)OC.$$

La formule (5) du n° 108, en raison de la proportionnalité des côtés a, b, c aux sinus des angles opposés, devient

$$(a + b + c)OP \triangleq aOA + bOB + cOC. \quad ,$$

Par suite,

$$2OF + OP \triangleq OA + OB + OC \triangleq 3OG,$$

G étant le barycentre des trois points A, B, C. Changeant O en F, on a

$$(10) \quad FP \triangleq 3FG,$$

relation qui, combinée avec la formule (3) du n° 104, $RH \triangleq 3RG$, donne aussi

$$(11) \quad HP \triangleq 2FR.$$

Par suite, *dans tout triangle, le barycentre G est au tiers de la droite qui va du barycentre F du périmètre au centre P du cercle inscrit, et la droite menée entre l'intersection H des trois hauteurs et le centre du cercle inscrit est équipollente au double de celle menée entre le barycentre du périmètre et le centre R du cercle circonscrit.*

111. On pourrait aussi démontrer que F est le point milieu de la droite joignant H au centre du cercle qui passe par les centres P_1, P_2, P_3 des cercles exinscrits au triangle ABC. Les relations (3), (4), (10), entre les points R, H, G, O, P, F, permettent de les déterminer lorsqu'on en connaît trois seulement, indépendants entre eux.

112. Des relations analogues existent par rapport aux barycentres F_1, F_2, F_3 des trois côtés du triangle, lorsqu'on affecte les éléments infiniment petits de l'un des côtés d'un coefficient négatif. Comme au n° 106, on trouve que la figure $FF_1F_2F_3$ est semblable à la figure $PP_1P_2P_3$; les côtés de la première sont les moitiés de ceux de la seconde.

Exercices sur les aires polygonales.

113. PROBLÈME. — *Exprimer le produit des aires de deux polygones au moyen des distances entre les sommets de l'un et ceux de l'autre.*

Dans le cas de deux triangles ABC, LMN, la règle XII (57) nous donne le produit cherché au moyen d'une équipollence que l'on pourrait bien construire, mais qu'il ne serait pas facile de calculer, parce que les termes représentent des droites non parallèles; fort heureusement, elle peut se résoudre en quatre de ces binômes que nous avons vus (96) être réductibles à des termes, tous d'inclinaison nulle. L'équipollence se convertit de la sorte en l'équation désirée. Voici le calcul :

$$\begin{aligned}
 16ABC.LMN &\stackrel{\sim}{=} (AB \text{ cj. } AC - \text{cj. } AB.AC) \\
 &\quad \times (LM \text{ cj. } LN - \text{cj. } LM.LN) \\
 &\stackrel{\sim}{=} AB \text{ cj. } AC \text{ cj. } LM.LN + \text{cj. } AB.AC.LM \text{ cj. } \bar{LN} \\
 &\quad - AB \text{ cj. } AC.LM \text{ cj. } LN - \text{cj. } AB.AC \text{ cj. } LM.LN \\
 &\stackrel{\sim}{=} (AB \text{ cj. } LM + \text{cj. } AB.LM) \\
 &\quad \times (AC \text{ cj. } LN + \text{cj. } AC.LN) \\
 &\quad - (AB \text{ cj. } LN + \text{cj. } AB.LN) \\
 &\quad \times (AC \text{ cj. } LM + \text{cj. } AC.LM) \\
 &\stackrel{\sim}{=} (gr^2 AM + gr^2 BL - gr^2 AL - gr^2 BM) \\
 &\quad \times (gr^2 AN + gr^2 CL - gr^2 AL - gr^2 CN) \\
 &\quad - (gr^2 AN + gr^2 BL - gr^2 AL - gr^2 BN) \\
 &\quad \times (gr^2 AM + gr^2 CL - gr^2 AL - gr^2 CM).
 \end{aligned}$$

Dans le développement du dernier membre, les termes dépendant des côtés AB, LM se réduisent aux deux seuls

$$gr^2 AL gr^2 BM - gr^2 AM gr^2 BL,$$

et un binôme analogue s'obtient pour chaque combi-

naison d'un côté du triangle ABC avec un côté du triangle LMN, étant bien entendu que les côtés, dans les deux triangles, doivent être pris dans le même sens.

Le produit des aires des deux triangles est ainsi donné par un polynôme de dix-huit termes, qui peut s'exprimer symboliquement comme il suit :

$$(1) \quad 16 ABC.LMN = (AB + BC + CA)(LM + MN + NL),$$

pourvu que, dans le développement du second membre, on substitue à chaque produit AB.LM le binôme

$$(AL.BM)^2 - (AM.BL)^2.$$

114. Si au triangle ABC est adossé un autre triangle ACD, de sorte qu'ils forment ensemble le quadrilatère ABCD, on aura la valeur de $16ABCD.LMN$, en ajoutant au premier facteur du second membre de (1) les termes $AC + CD + DA$. Or les binômes qui résultent du terme AC, et qui sont, par exemple, $(AL.CM)^2 - (AM.CL)^2$, détruisent évidemment ceux résultant de CA, et qui sont $(CL.AM)^2 - (CM.AL)^2, \dots$; donc, en admettant la convention précédente (113), nous aurons

$$16ABCD.LMN = (AB + BC + CD + DA)(LM + MN + NL).$$

Par le même raisonnement, nous pourrions étendre la formule au produit de deux polygones, et le problème serait ainsi résolu; il resterait à combiner chaque côté de l'un des polygones avec chaque côté de l'autre, et à calculer, pour chaque combinaison, l'un des binômes ci-dessus.

115. Ce théorème, de même que son analogue relatif au produit de deux polyèdres, a été publié par moi, avec divers autres, dans les *Annales des Sciences du royaume lombard-vénitien*, t. IV, p. 256, 1834, et t. VIII, p. 96,

§ 108, 1838. Il a été reproduit depuis lors dans le *Journal für die Mathematik*, Bd. XXIV, § 252, 1842, et aussi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. On l'a attribué à Staudt.

116. Si R est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, la formule symbolique (1) se réduit à

$$16ABC.RMN = (AB + BC + CA)(MN),$$

parce que les termes exprimés symboliquement par $(AB + BC + CA)(RM + NR)$ sont tous multipliés par une des quantités égales $(AR)^2 = (BR)^2 = (CR)^2$, et se détruisent réciproquement.

Si R_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, la somme

$$16ABC.RMN + 16ACD.R_1MN$$

sera exprimée (114) par

$$(AB + BC + CD + DA)(MN),$$

expression qui dépend des côtés et non des diagonales du polygone ABCD; par conséquent, si ce polygone avait été divisé d'une autre manière en triangles, cela n'aurait pas changé la valeur de la somme des produits de chaque triangle par le triangle ayant pour sommet le centre du cercle circonscrit à ce triangle, et pour base une droite MN choisie arbitrairement.

Il résulte de là et d'une propriété connue des barycentres, pouvant facilement se déduire de la définition qu'on en a donnée (99), que :

Pour tout polygone ou assemblage de polygones (situés dans un même plan), il existe un point qui est le barycentre de masses proportionnelles aux aires des triangles distincts en lesquels le polygone peut être

divisé, ces masses étant situées aux centres des cercles circonscrits à ces triangles, au lieu de l'être aux barycentres de ceux-ci.

A ce point remarquable, qui n'a été, à ma connaissance, observé par personne, j'ai donné le nom de *pseudo-centre*.

117. Supposons, par exemple, qu'un triangle ABC soit divisé en trois triangles GBC, GCA, GAB, dont les aires soient α, β, γ , d'où résulte que l'on a (100)

$$\alpha GA + \beta GB + \gamma GC \triangleq 0;$$

le pseudo-centre du triangle ABC, c'est-à-dire le centre R de son cercle circonscrit, sera aussi le pseudo-centre de l'ensemble des trois triangles, c'est-à-dire sera le barycentre des centres R_1, R_2, R_3 des cercles circonscrits à GBC, GCA, GAB, affectés des coefficients numériques, ou masses, α, β, γ ; cela revient à dire qu'on aura

$$\alpha RR_1 + \beta RR_2 + \gamma RR_3 \triangleq 0.$$

En particulier, si G est le barycentre du triangle ABC, R sera celui du triangle $R_1 R_2 R_3$.

118. Nous pourrions appeler *multilatéral* un système de droites MN, PQ, ... dont la somme géométrique est nulle, et qui, par conséquent, sont équipollentes aux côtés d'un polygone fermé. La somme des triangles OMN, OPQ, ..., qui ont un sommet commun O et pour bases les côtés d'un multilatéral, sera exprimée, d'après la règle XII, par

$$\frac{\sqrt{}}{4} (OM \text{ cj. } MN + OP \text{ cj. } PQ + \dots - \text{cj. } OM.MN - \text{cj. } OP.PQ - \dots).$$

Pareillement, pour un autre point O_1 , nous aurons

$$\frac{\sqrt{}}{4} (O_1 M \text{ cj. } MN + O_1 P \text{ cj. } PQ + \dots - \text{cj. } O_1 M.MN - \text{cj. } O_1 P.PQ - \dots).$$

La différence de ces deux expressions est

$$\frac{\sqrt{}}{4} [OO_1(cj.MN + cj.PQ + \dots) - cj.OO_1(MN + PQ + \dots)],$$

valeur qui est nulle, puisque

$$MN + PQ + \dots \triangleq 0.$$

Donc :

THÉORÈME. — *La somme des aires des triangles qui ont pour bases les côtés d'un multilatéral MN, PQ, ... et un sommet commun est constante, quel que soit ce sommet; elle est dite aire du multilatéral.*

Le plus simple multilatéral est celui formé de deux droites parallèles égales et directement opposées, c'est-à-dire telles que

$$MN + PQ \triangleq 0.$$

Son aire est la moitié de celle du parallélogramme MNPQ.

119. THÉORÈME. — *Le produit des aires d'un polygone ABCD et d'un multilatéral MN, PQ, ... est exprimé symboliquement, selon la convention du n° 113, par*

$$\frac{1}{16} (AB + BC + CD + DA) (MN + PQ + \dots).$$

On le démontre en prenant pour aire du multilatéral la somme des triangles RMN, RPQ, ... ayant pour sommet commun le pseudo-centre R du polygone ABCD.

120. Étant données plusieurs droites MN, PQ, ..., l'on veut déterminer une droite XY telle que le multilatéral MN, PQ, ..., XY ait une aire nulle, on devra tout d'abord choisir la grandeur et la direction de la droite RS, de telle sorte que l'on ait

$$MN + PQ + \dots + RS \triangleq 0,$$

d'où résulte

$$XY \triangle RS;$$

puis l'autre condition

$$OMN + OPQ + \dots + OXY = 0$$

sera satisfaite, si l'on détermine le point X de manière que l'on ait

$$OM \text{ cj. } MN + OP \text{ cj. } PQ + \dots + OX \text{ cj. } RS \triangle 0.$$

Le point X étant déterminé de cette manière, si l'on considère qu'un multilatéral d'aire nulle peut représenter un système de forces en équilibre (*), on voit que, *si les forces MN, PQ, ... tournent d'un même angle autour de leurs points d'application M, P, ..., leur résultante YX tourne elle-même d'un angle égal autour d'un point X.*

ADDITION DU TRADUCTEUR AU N° 120.

Quelques propriétés des barycentres.

1. Si MN, PQ, ... est un multilatéral, le barycentre G des points M, P, ... est le même que celui G' des points N, Q, ...

En effet, on a

$$MN + PQ + \dots \triangle 0,$$

ou

$$ON - OM + OQ - OP + \dots \triangle 0,$$

$$ON + OQ + \dots \triangle OM + OP + \dots,$$

c'est-à-dire, en appelant n le nombre des côtés,

$$n OG' \triangle n OG;$$

d'où

$$OG' \triangle OG.$$

Si LL', MM', NN' sont des droites égales et parallèles aux côtés BC,

(*) Il est facile, en effet, de voir que, si l'aire est nulle, la somme des moments est nulle par rapport à un point quelconque, de sorte que toutes les conditions d'équilibre sont remplies.

(Note du Traducteur.)

CA, AB d'un triangle, les deux triangles LMN, L'M'N' auront même barycentre; c'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

2. Soient ABC un triangle, O un point quelconque. Si l'on mène $LL' \triangle AO$, $MM' \triangle BO$, $NN' \triangle CO$, et qu'on appelle G le barycentre du triangle ABC, G_1 celui du triangle LMN, G'_1 celui du triangle L'M'N', la figure OGG₁G'₁ sera un parallélogramme.

On a effectivement

$$LO - L'O \triangle AO,$$

$$MO - M'O \triangle BO,$$

$$NO - N'O \triangle CO,$$

et, par addition,

$$3 G_1 O - 3 G'_1 O \triangle 3 GO,$$

$$G_1 G'_1 \triangle GO.$$

Il est aisé d'étendre ce théorème à un système d'un nombre de points quelconque, et même de l'établir dans l'espace, ainsi que le précédent.

Si $LL' \triangle nAO, \dots$, on aura $G_1 G'_1 = nGO$. Si le point arbitraire O coïncide avec le barycentre G, les deux points G_1, G'_1 coïncideront. Il est aisé de voir qu'alors les droites LL', MM', NN' forment un multilatéral de trois côtés, correspondant à un triangle semblable à ABC.

3. Soient ABC un triangle, O un point quelconque, G le barycentre; on mène AA', BB', CC' , perpendiculaires et respectivement égales à AO, BO, CO. Si l'on appelle G' le barycentre du triangle A'B'C', les trois points O, G, G' formeront un triangle rectangle isocèle.

On aura, en effet,

$$AO - A'O \triangle \sqrt{AO},$$

$$BO - B'O \triangle \sqrt{BO},$$

$$CO - C'O \triangle \sqrt{CO},$$

et, par addition,

$$3 GO - 3 G'O \triangle 3 \sqrt{GO},$$

$$GG' \triangle \sqrt{GO}.$$

Si les angles $A'AO, \dots$ étaient égaux à un angle α au lieu d'être droits, le triangle G'GO serait encore isocèle, mais l'angle G serait égal à α ; et, en général :

Si l'on forme les triangles OAA', OBB', OCC' semblables entre eux, le triangle OGG' sera semblable à chacun des précédents.

4. La propriété du n° 2 peut recevoir encore une extension assez intéressante :

Soient

A, B, C, ... un système de points de barycentre G;

A', B', C', ... un système de points (en même nombre) de barycentre G';

$LL', MM', NN', \dots$ une série de droites respectivement équipollentes à

$AA', BB', CC', \dots$;

G_1 le barycentre du système des points $L, M, N, \dots$;

G'_1 le barycentre du système des points $L', M', N', \dots$.

La figure $GG'G'_1G_1$ sera un parallélogramme.

Car $LL' \triangleq AA'$ peut s'écrire

$$LO - L'O \triangleq AO - A'O.$$

De même

$$MO - M'O \triangleq BO - B'O,$$

$$NO - N'O \triangleq CO - C'O,$$

.....

Ajoutant

$$nG_1O - nG'_1O \triangleq nGO - nG'O,$$

$$G_1G'_1 \triangleq GG'.$$

5. Soient

$A_1, A_2, \dots, A_n$ un système de n points sur un plan;

G le barycentre de tous ces points;

G_p celui de ces points, moins le point A_p .

La figure $G_1G_2 \dots G_n$ est homothétique à $A_1A_2 \dots A_n$; le centre de similitude est G , et le rapport de similitude $\frac{1}{n-1}$.

On a

$$A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_nA_1 \triangleq A_2A_1,$$

ou

$$(A_1O + A_2O + \dots + A_nO) - (A_2O + A_3O + \dots + A_1O) \triangleq A_2A_1.$$

Ajoutant A_1O aux deux membres,

$$nGO - (n-1)G_2O \triangleq A_2O,$$

$$GO + (n-1)GG_2 \triangleq A_2O,$$

$$GG_2 \triangleq \frac{A_2G}{n-1}.$$

Exercices sur quelques questions de Géométrie supérieure.

121. Nous avons vu, au n° 29, que

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \triangleq AC \cdot BD,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} + \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} \triangleq 1.$$

Les doubles rapports qui forment les deux termes du premier membre de cette équipollence sont appelés par M. Chasles *rapports anharmoniques*, pourvu que, en outre, les quatre points A, B, C, D soient en ligne droite; mais, d'après le principe général (24) qui s'applique à la méthode des équipollences, toute propriété de points en ligne droite s'étend aux points d'un plan. Nous présenterons quelques exemples se rapportant à cette théorie.

122. Je démontrerai tout d'abord une formule très-facile à retenir de mémoire, laquelle comprend, comme cas particuliers, un grand nombre d'autres données par Mœbius, Chasles, etc. On propose d'exprimer un double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$ au moyen des doubles rapports $\frac{AB.CD}{CB.AD}$, $\frac{AB.CE}{CB.AE}$, $\frac{AB.CF}{CB.AF}$, $\frac{AB.CG}{CB.AG}$, dans lesquels les quatre points du premier sont rapportés à trois points constants A, B, C. Nous représenterons par d, e, f, g ces derniers doubles rapports.

On remarquera que nous ne suivons pas ici la convention, toujours adoptée par nous jusqu'à présent, consistant à indiquer par les lettres $d, \dots$ des rapports numériques; tout au contraire, chacune de ces lettres pourra exprimer un nombre multiplié par une puissance quelconque du ramun.

Au moyen du théorème déjà cité (29), on a

$$\begin{aligned} & - AC.DE \simeq AE.CD - AD.CE, \\ & - AC.FG \simeq AG.CF - AF.CG, \\ & - AC.DG \simeq AG.CD - AD.CG, \\ & - AC.FE \simeq AE.CF - AF.CE. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans le double rapport $\frac{DE.FG}{DG.FE}$,

celui-ci devient

$$\frac{(AE \cdot CD - AD \cdot CE)(AG \cdot CF - AF \cdot CG)}{(AG \cdot CD - AD \cdot CG)(AE \cdot CF - AF \cdot CE)},$$

que l'on reconnaît facilement comme identique à

$$\frac{(d - e)(f - g)}{(d - g)(f - e)}.$$

La même démonstration peut s'étendre à des rapports plus compliqués, de forme analogue au précédent, et que nous appellerons *rapports multiples*. Donc :

Connaissant tous les doubles rapports $\frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} \hat{=} d, \dots$, tout autre rapport multiple sera déterminé par une formule analogue à

$$\frac{DE \cdot FG \cdot MN}{DN \cdot MG \cdot FE} \hat{=} \frac{(d - e)(f - g)(m - n)}{(d - n)(m - g)(f - e)}.$$

Si, dans le rapport que l'on veut exprimer au moyen des doubles rapports $d, e, f, \dots$, entrainé quelqu'un des points A, B, C, la même formule subsisterait, pourvu qu'on fît la remarque que, évidemment, on a

$$\begin{aligned} c &\hat{=} \frac{AB \cdot CC}{CB \cdot AC} \hat{=} 0, \\ b &\hat{=} \frac{AB \cdot CB}{CB \cdot AB} \hat{=} 1, \\ a &\hat{=} \frac{AB \cdot CA}{CB \cdot AA} \hat{=} \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, par exemple, on aura

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} &\hat{=} \frac{b - d}{b - c} \hat{=} 1 - d \hat{=} 1 - \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD}, \\ \frac{AC \cdot DE}{DC \cdot AE} &\hat{=} \frac{d - e}{d}, \\ \frac{AE \cdot BD}{BE \cdot AD} &\hat{=} \frac{1 - d}{1 - e} \hat{=} \left(\frac{CB}{AB} - \frac{CD}{AD} \right) : \left(\frac{CB}{AB} - \frac{CE}{AE} \right). \end{aligned}$$

C'est la formule au moyen de laquelle M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § 33) exprime le rapport anharmonique des points A, E, B, D au moyen d'un cinquième point C.

123. Soient pris arbitrairement les points A, B, C, D, ..., et arbitrairement aussi les trois points A', B', C', que nous considérons comme correspondant aux trois premiers. On détermine les points D', E', ... de manière que

$$\frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} \stackrel{\wedge}{=} \frac{A'B' \cdot C'D'}{C'B' \cdot A'D'}, \dots$$

Tout rapport multiple entre les points A, B, C, D, ... sera équipollent au rapport formé par les points correspondants A', B', C', D', ...; c'est une conséquence immédiate du théorème du n° 122.

124. Si au premier système de points considéré appartient un point J situé à une distance infinie, on aura, quelle que soit la direction des droites tracées vers ce point,

$$\frac{CJ}{AJ} \stackrel{\wedge}{=} 1;$$

par suite,

$$(1) \quad \frac{AB \cdot CJ}{CB \cdot AJ} \stackrel{\wedge}{=} \frac{AB}{CB} \stackrel{\wedge}{=} \frac{A'B' \cdot C'J'}{C'B' \cdot A'J'}.$$

Semblablement, le point I du premier système, qui correspond à tout point I' situé à une distance infinie et considéré comme appartenant au second, est donné par

$$(2) \quad \frac{AB \cdot CI}{CB \cdot AI} \stackrel{\wedge}{=} \frac{A'B'}{C'B'};$$

divisant l'une par l'autre ces deux équipollences, on

obtient

$$(3) \quad IA \cdot J'A' \stackrel{\sim}{=} IC \cdot J'C'.$$

Tout ce que nous avons trouvé pour A, C peut se répéter pour deux autres points. Ainsi *les droites qui, de deux points I, J', correspondant dans chaque système des points à l'infini de l'autre, vont aboutir à deux points correspondants, ont entre elles un produit constant en grandeur comme en direction.*

125. Les deux figures inverses étant situées sur le même plan, nous pourrions chercher le point E qui coïncide avec son propre correspondant E'. Nous emploierons, dans ce but, l'équipollence

$$IE \cdot J'E \stackrel{\sim}{=} IA \cdot J'A' \quad (85)$$

ou

$$IE(IE - IJ') \stackrel{\sim}{=} IA \cdot J'A'.$$

Posant $IJ' \stackrel{\sim}{=} 2IO$, on aura

$$(IE)^2 - 2IO \cdot IE + (IO)^2 \stackrel{\sim}{=} IA \cdot J'A' + (IO)^2.$$

Pour extraire plus facilement la racine du second membre, nous supposons que O' soit, dans la seconde figure, le point qui correspond à O considéré comme appartenant à la première, si bien (124) que

$$IA \cdot J'A' \stackrel{\sim}{=} IO \cdot J'O'.$$

D'après cela, nous aurons

$$(4) \quad IE - IO \stackrel{\sim}{=} \pm \sqrt{IO(IO + J'O')} \stackrel{\sim}{=} \pm \sqrt{OJ' \cdot OO'}.$$

Donc il y a deux points E, F qui, dans deux figures inverses, coïncident avec leurs propres correspondants. La droite FOE est bissectrice de l'angle J'OO', et les droites OE $\stackrel{\sim}{=} FO$ sont moyennes proportionnelles entre OJ', OO'.

Ces conclusions sont identiques avec celles qui existent pour des points situés sur une même ligne droite (CHASLES, *Géométrie supérieure*, § 154).

Si les points L, L₁ sont déterminés par l'équipollence

$$(OL)^2 \simeq IO \cdot J'O',$$

nous verrons plus loin que E, F sont les foyers de l'ellipse ayant pour diamètres conjugués IOJ', LOL₁.

126. Connaissant les trois couples de points correspondants A, B, C, A', B', C', les centres d'inversion I, J' seront déterminés par les équipollences

$$(5) \quad AI \simeq \frac{AB \cdot AC \cdot C'B'}{AB \cdot C'B' - A'B' \cdot CB}, \quad A'J' \simeq \frac{A'B' \cdot A'C' \cdot CB}{A'B' \cdot CB - AB \cdot C'B'},$$

lesquelles deviennent plus simples si l'on connaît les points E, F se correspondant à eux-mêmes, puisque alors on a

$$(6) \quad EI \simeq \frac{CE \cdot CF}{CC'}, \quad EJ' \simeq \frac{EC' \cdot CF}{CC'}.$$

127. Si l'on considère les points E, F (dont chacun se correspond à lui-même), il y aura, pour tout couple de points correspondants, constance du double rapport

$$(7) \quad \frac{EA' \cdot FA}{EA \cdot FA'} \simeq -\mu.$$

On a, en effet (123),

$$\frac{EB \cdot FA}{EA \cdot FB} \simeq \frac{EB' \cdot FA'}{EA' \cdot FB'}.$$

A l'équipollence (7), on peut donner la forme

$$\mu \frac{EA}{FA} + \frac{EA'}{FA'} \simeq 0$$

ou

$$(8) \quad \frac{\mu}{FA} + \frac{1}{FA'} \simeq \frac{\mu + 1}{FE},$$

puisque, en ajoutant la première avec la seconde multipliée par FE, on obtient une équipollence identique.

La relation (8) peut s'exprimer en disant que E est, *par rapport à l'origine F*, le *centre harmonique* des points A, A', affectés des coefficients $\mu, 1$. Dans cet énoncé, μ doit être regardé d'une façon générale comme imaginaire. On a aussi

$$\mu \frac{A'F}{AF} + \frac{A'E}{AE} \simeq 0$$

ou

$$(9) \quad \frac{\mu}{AF} + \frac{1}{AE} \simeq \frac{\mu + 1}{AA'},$$

d'où il résulte que A' est, par rapport à l'origine A, le centre harmonique des points F, E, affectés des coefficients $\mu, 1$.

128. L'imaginaire μ s'exprime très-facilement au moyen des centres d'inversion I, J'. Il suffit, en effet, de faire tendre vers l'infini l'un des points A, A', pour que la relation (7) donne

$$(10) \quad -\mu \simeq \frac{FI}{EI} \simeq \frac{EJ'}{FJ'}$$

ou

$$\mu J'F + J'E \simeq 0,$$

c'est-à-dire (99) que J' est le barycentre des points F, E affectés des coefficients $\mu, 1$.

129. Dans le cas particulier où

$$AB.C'B' \simeq A'B'.CB,$$

les points I, J' n'existent plus, et les deux figures, au lieu

d'être inverses, sont *semblables*; le point E ci-dessus, qui coïncide avec son propre correspondant, est seul, et se trouve déterminé par

$$\frac{AB}{AE} \simeq \frac{A'B'}{A'E}.$$

Nous l'avons déjà trouvé, au n° 40, désigné par la lettre I.

130. Quand deux figures inverses ont leurs centres d'inversion coïncidant en un seul point I, il nous suffit, pour le trouver, d'avoir deux couples de points correspondants A, A', B, B'. En effet, de

$$IA \cdot IA' \simeq IB \cdot IB',$$

on déduit

$$IA \cdot AA' \simeq IA (AB' + AB) + AB \cdot AB'$$

ou

$$(1) \quad AI \simeq \frac{AB \cdot AB'}{AB + A'B'}.$$

Les points E, F sont déterminés par l'équipollence

$$(2) \quad IE \simeq - IF \simeq \sqrt{IA \cdot IA'}.$$

Dans ce cas spécial, la valeur de μ est (128)

$$- FI : IF \simeq 1;$$

par suite, on a (127) le double rapport *harmonique*

$$\frac{EA' \cdot FA}{EA \cdot FA'} \simeq -1.$$

Ceci exprime que le quadrilatère EAFA', outre qu'il est inscriptible dans un cercle, a le produit de deux côtés opposés égal au produit des deux autres. Je l'appelle quadrilatère *harmonique*, parce qu'il est par rapport à un plan ce que sont par rapport à une droite deux cou-

ples de points conjugués harmoniques. Ainsi, par la construction des équipollences (1), (2), on trouve les deux points E, F, qui forment un quadrilatère harmonique, aussi bien avec A, A' qu'avec B, B'.

131. Dans le cas ci-dessus d'un seul centre d'inversion I, si au point A de la première figure correspond le point A' de la seconde, et que l'on considère ce point A' comme appartenant à la première figure, il est évident qu'à ce point correspondra le point A dans la seconde figure. On aura, par suite (123),

$$(3) \quad \frac{AB \cdot CA'}{AA' \cdot CB} \stackrel{\sim}{=} \frac{A'B' \cdot CA}{A'A \cdot C'B'}$$

ou

$$(4) \quad \frac{AB \cdot CA' \cdot B'C'}{AC' \cdot B'A' \cdot CB} \stackrel{\sim}{=} 1.$$

En même temps que cette équipollence, et de la même manière, on en a aussi trois autres, que l'on obtient en disposant dans un autre ordre les points des trois couples A, A', B, B', C, C'. On a également

$$(5) \quad \frac{AB \cdot A'C}{AC \cdot A'B} \stackrel{\sim}{=} \frac{A'B' \cdot AC'}{A'C' \cdot AB'}$$

ou

$$(6) \quad \frac{AB \cdot A'C \cdot AB' \cdot A'C'}{AC' \cdot A'B' \cdot AC \cdot A'B} \stackrel{\sim}{=} 1,$$

et deux autres équipollences analogues.

Nous avons déjà parlé au n° 42 de ces relations simultanées entre six points d'un plan. En outre du point I, nous avons les deux points E, F, qui forment les trois quadrilatères harmoniques EAFA', EBF B', ECFC'.

132. Je pourrais étendre beaucoup plus ces applications de la méthode des équipollences; mais ce que j'ai

dit me paraît suffisant pour faire connaître les avantages qu'elle présente en comparaison de l'application ordinaire de l'Algèbre à la Géométrie. Il est d'ailleurs évident que, par cette dernière méthode, on ne traite aucune question qui ne puisse aussi être traitée avec le secours du calcul des équipollences ; par exemple, lorsqu'on rapporte un point M à deux axes coordonnés passant par l'origine O et qu'on le détermine au moyen des coordonnées x, y , c'est comme si l'on posait

$$OM \sphericalangle x + y \epsilon^{\alpha},$$

α étant l'angle des deux axes coordonnés.

La méthode des équipollences, outre les avantages résultant des artifices qui lui sont propres, présente aussi celui de déterminer les positions respectives des éléments d'une figure, sans donner lieu à aucune chance d'erreur, parce qu'il n'est nécessaire d'avoir aucune figure sous les yeux, et que tout s'exécute au moyen d'un algorithme connu et selon des règles fixes.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DIVERSES A LA THÉORIE DES COURBES.

Preliminaires.

133. En passant à l'étude des courbes, nous aurons encore occasion de reconnaître les avantages de notre méthode. Si nous voulons rapporter les points d'une courbe à des coordonnées orthogonales, nous pourrons poser

$$OM \sphericalangle x + y \vee$$

et imaginer que les deux variables réelles x, y soient liées entre elles par une équation.

Mais il convient de considérer la question à un point de vue plus général; nous traiterons ainsi en même temps et des coordonnées parallèles et des coordonnées polaires et des autres systèmes qui paraîtront s'appliquer le mieux à chaque circonstance spéciale.

Supposant que O soit un point fixe, si OM était donné par une équipollence sans aucune variable, le point M serait entièrement déterminé; mais si, dans cette équipollence entre une variable t , pouvant recevoir toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, à chaque valeur de t correspondait un point différent M , tous ces points constitueraient un lieu géométrique ou une ligne : donc l'expression générale d'une ligne droite ou courbe est

$$OM \stackrel{\sim}{=} \Phi(t).$$

Dans la fonction Φ , entreront deux ou plusieurs droites connues de grandeur et de position, et pourra entrer aussi le ramun. Dans les cas spéciaux où la forme de la fonction est

$$OM \stackrel{\sim}{=} x + y \sqrt{}$$

ou

$$OM \stackrel{\sim}{=} z e^u,$$

en admettant que x, y ou z, u soient des fonctions réelles de t , la courbe sera rapportée aux coordonnées orthogonales ou aux coordonnées polaires.

134. Imaginant que t soit le temps, l'équipollence précédente

$$OM \stackrel{\sim}{=} \Phi(t)$$

exprime le mouvement d'un point le long d'une courbe déterminée et suivant une loi déterminée, si bien que, par les mêmes calculs, nous étudierons en même temps

les diverses sortes de mouvements. La science du mouvement (*cinématique* d'Ampère) considérée comme un fait, sans se préoccuper des causes, tend toujours à s'associer de plus en plus à la science de l'étendue. Du reste, nous pourrions faire abstraction de cette considération, et examiner une courbe indépendamment du mouvement d'un point générateur.

135. Nous résoudrons les problèmes relatifs aux courbes en employant la forme générale

$$OM \stackrel{\Delta}{=} \Phi(t),$$

sans attribuer à cette fonction une forme plutôt qu'une autre. Nous emploierons pour cet objet un calcul tout à fait semblable au calcul algébrique, sans qu'il soit aucunement nécessaire de recourir aux considérations de la Géométrie infinitésimale, ou à celles, peut-être plus rigoureuses et certainement plus pénibles, que leur ont substituées quelques mathématiciens plus *lagrangistes* que Lagrange lui-même.

Avant d'aborder les généralités, j'espère donner plus de clarté à mon exposition, en m'occupant de quelques cas particuliers.

Parabole.

136. Cherchons les propriétés de la courbe exprimée par l'équipollence

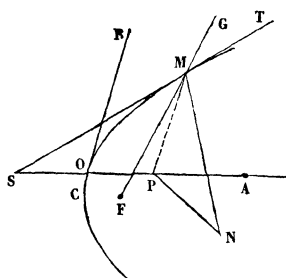
$$(1) \quad OM \stackrel{\Delta}{=} t^2 OA + t OB,$$

où OA, OB (*fig. 30*) sont deux droites déterminées non parallèles, et où t est la variable réelle.

Faisant $t = 0$, nous voyons que la courbe passe par le point O ; faisant $t = \pm \infty$, on s'aperçoit que la courbe a

deux branches infinies, lesquelles tendent toujours de plus en plus à devenir parallèles à la droite OA (puisque $t = \infty$ rend tOB négligeable relativement à t^2OA). Ces

Fig. 30.



branches n'ont pas d'asymptotes, puisque toute droite parallèle à OA est coupée par l'une d'elles (*).

La courbe est appelée parabole.

137. Si le point M_1 de la courbe correspond à $t + \omega$, on a

$$MM_1 \simeq OM_1 - OM \simeq 2t\omega OA + \omega OB + \omega^2 OA.$$

Si ω diminue indéfiniment, MM_1 a pour limite une droite qui est dite *tangente* à la courbe. La direction de MM_1 est la même que celle de

$$MM_1 : \omega \simeq 2tOA + OB + \omega OA$$

dont la limite, lorsque l'on fait diminuer ω indéfiniment, est

$$(2) \quad MT \simeq 2tOA + OB.$$

(*) En effet, si une droite parallèle à OA coupe OB en D, il suffit de prendre $t = \frac{OD}{OB}$ pour avoir l'intersection.

On voit ainsi qu'au point O, correspondant à $t = 0$, la courbe est tangente à OB.

138. Pour trouver le point S où la tangente MT rencontre OA, nous observerons que

$$OS \simeq OM + MS$$

devra être parallèle à OA (en appelant aussi *parallèles* deux droites superposées); ce qui exprime (4) que le point S appartient à la droite OA.

Semblablement, MS devra être parallèle à la droite

$$MT \simeq 2tOA + OB;$$

donc, ayant

$$OM \simeq t^2OA + tOB,$$

on voit d'un coup d'œil que, pour que dans l'expression de OS n'entre pas la droite OB, on doit avoir

$$OS \simeq OM - tMT \simeq -t^2OA.$$

La droite OM est la somme géométrique de

$$OP \simeq t^2OA, \quad PM \simeq tOB;$$

par suite

$$(3) \quad SO \simeq OP,$$

propriété connue de la tangente à la parabole.

139. Tirant MG, qui forme avec la tangente MT un angle égal à l'inclinaison de MT sur OA, une portion de MG sera exprimée (16) par

$$MG \simeq g(MT)^2 : OA - 4gt^2OA + 4gtOB + g(OB)^2 : OA$$

et l'on aura

$$OG \simeq OM + MG.$$

Si F est le point de la droite MG correspondant à

$g = -\frac{1}{t}$, on a

$$(4) \quad OF \propto - (OB)^2 : 4OA,$$

qui est indépendant de t ; par suite, dans la parabole, il existe un point F (foyer), tel que chaque rayon vecteur FM forme avec la tangente en M un angle égal à l'inclinaison de cette tangente sur le diamètre OA.

140. Si un point pesant est lancé dans le vide, son mouvement se trouve exprimé par l'équipollence

$$OM \propto t^2 OA + tOB.$$

La vitesse correspondante d'un tel mouvement est donnée en grandeur et en direction par l'expression

$$MT \propto 2tOA + OB,$$

qui est la dérivée de OM par rapport au temps t . Les calculs du paragraphe précédent donnent

$$FM \propto (MT)^2 : 4OA.$$

Cette équipollence signifie que la vitesse d'un point pesant est proportionnelle à la racine carrée de sa distance au foyer.

141. La droite

$$(5) \quad NM \propto tOB + (OB)^2 : 2OA$$

fait avec la tangente

$$MT \propto 2tOA + OB$$

un angle égal à celui que forme OB avec OA (16).

Ayant $PM \propto tOB$, on a aussi

$$(6) \quad PN \propto - (OB)^2 : 2OA \propto 2OF,$$

c'est-à-dire que, en menant du pied P de l'ordonnée une

droite équipollente à la constante $2OF$, on obtient un point de la droite MN ci-dessus. Si l'angle AOB est droit, cela nous donne la propriété connue de la sous-normale PN .

142. En changeant l'origine O , nous pouvons tout ramener au cas où l'angle AOB est droit, ce qui rend les calculs plus simples. Si, en effet, C est un point de la parabole, de telle sorte que

$$OC \simeq c^2 OA + c OB,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} CM &\simeq (t^2 - c^2) OA + (t - c) OB \\ &\simeq (t - c)^2 OA + (t - c) (2c OA + OB), \end{aligned}$$

équipollence de même forme que

$$OM \simeq t^2 OA + t OB,$$

ce que l'on reconnaît évidemment en changeant $t - c$ en t , et $2c OA + OB$ en CB . Il sera toujours possible de donner à c une valeur telle que $2c OA + OB$ soit perpendiculaire à OA .

Changeant t en at , nous pouvons en outre rendre égales les deux droites qui sont multipliées par t^2 et par t ; et, les prenant pour unité de longueur, on peut donner à l'équipollence de la parabole la forme plus simple

$$(7) \quad CM \simeq t^2 + t \sqrt{.}$$

Dans ce cas, le foyer est donné par

$$CF \simeq 1 : 4,$$

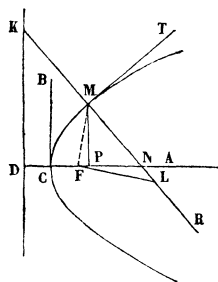
la tangente en M par

$$(8) \quad MT \simeq 2t + \sqrt{.}$$

et la normale par

$$(9) \quad MN \cong \frac{1}{2} - t\sqrt{\quad} \quad (fig. 31).$$

Fig. 31.



143. Un point R quelconque de la normale est donné par

$$\text{CR} \stackrel{\circ}{=} \text{CM} + 2p \text{MN} \stackrel{\circ}{=} t^2 + p + (t - 2tp) \sqrt{}.$$

Pour que ce point R soit le point d'intersection de la normale MN avec celle infiniment voisine, il faut que le point R ne change pas lorsqu'on donne à t un accroissement infiniment petit ω , d'où résulte pour p un accroissement correspondant ϖ . Selon les principes du Calcul différentiel, cela s'exprime par $dCR \approx 0$, ou

$$(2t + \sqrt{1-4p})\omega + (1 - 2t\sqrt{1-4p})\overline{\omega} \in \mathcal{O}.$$

Séparant la partie multipliée par le ramun, cette équation donne les deux équations

$$2t\omega + \varpi = 0,$$

$$(1 - 2p)\omega - 2\tau\varpi = 0.$$

On en déduit

$$2p = 4t^2 + 1;$$

par suite l'équipollence

$$(10) \quad CR \cong \frac{1}{2} + 3t^2 - 4t^3 \sqrt{}$$

est celle de la développée de la parabole.

144. Le rayon de courbure est donc exprimé en grandeur et en direction par

$$\begin{aligned} \text{MR} &\simeq 2t^2 + \frac{1}{2} - (t + 4t^3)\sqrt{} \\ &\simeq (1 + 4t^2)(\frac{1}{2} + t\sqrt{}) \simeq (1 + 4t^2) \text{MN}. \end{aligned}$$

La droite MN, étant la somme géométrique de deux droites perpendiculaires, a pour longueur $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2}$; par suite le rayon de courbure MR est proportionnel au cube de la normale MN, terminée à l'axe de la parabole. Si $\text{ML} \simeq \frac{1}{2}\text{MR}$, c'est-à-dire si L est le milieu de MR, ayant $\text{CF} \simeq \frac{1}{4}$, on aura

$$\text{FL} \simeq \text{CM} + \text{ML} = \text{CF} \simeq 2t^2 + (\frac{1}{2} - 2t^2)t\sqrt{},$$

c'est-à-dire que FL est perpendiculaire à

$$\text{FM} \simeq t^2 - \frac{1}{4} + t\sqrt{}.$$

Donc le rayon de courbure est double de la portion ML de la normale qui est hypoténuse du triangle MFL, rectangle au foyer F. Si l'on prend sur le prolongement du rayon RM la longueur MK $\simeq$ LM, on a

$$(11) \quad \text{CK} \simeq -\frac{1}{4} + \left(\frac{3t}{2} + 2t^3\right)\sqrt{},$$

et par suite le point K appartient à la directrice DK de la parabole.

Ellipse.

145. L'ellipse est exprimée par l'équipollence

$$(1) \quad \text{OM} \simeq x\text{OA} + y\text{OB} \quad (\text{fig. 32}),$$

pourvu que les quantités réelles x , y satisfassent à l'équation

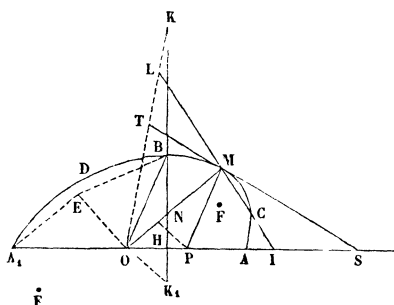
$$(2) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

ce que l'on peut faire en posant

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Les deux valeurs égales, mais de signes contraires, que prend chaque variable pour toute valeur de l'autre, nous

Fig. 32.



montrent que OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

La direction de la tangente au point M est donnée par $dx OA + dy OB$, dx et dy étant liés par l'équation

$$x dx + y dy = 0,$$

qui est la dérivée de

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Par suite, nous déterminerons la direction de la tangente par l'équipollence suivante :

$$(3) \quad MT \equiv -y OA + x OB$$

que nous eussions pu obtenir immédiatement, en dérivant par rapport à t la relation

$$OM \equiv \cos t OA + \sin t OB.$$

Cette tangente MT rencontre la droite OA au point S ,

que l'on détermine en faisant la somme géométrique de OM et d'une droite parallèle à MT telle que le terme contenant OB disparaisse. De là

$$(4) \quad OS \simeq OM - \frac{\gamma}{x} MT \simeq \left(x + \frac{\gamma^2}{x} \right) OA \simeq \frac{1}{x} OA.$$

Par conséquent, si $OP \simeq xOA$ (de sorte que PM soit parallèle à OB), on a

$$OP \cdot OS \simeq (OA)^2.$$

146. La droite

$$MN \simeq MTOB : OA \simeq -\gamma OB + x(OB)^2 : OA$$

forme (16) avec la tangente l'angle constant AOB. On a

$$(5) \quad ON \simeq OM + MN \simeq xOA + x(OB)^2 : OA \simeq xA_1E,$$

si l'on pose

$$OE \simeq (OB)^2 : OA,$$

c'est-à-dire si l'on forme le triangle BOE directement semblable à AOB.

Il en résulte en outre

$$PN \simeq ON - OP \simeq xOE,$$

et le triangle OPN est homothétique au triangle constant A_1OE (ayant pris $A_1O \simeq OA$).

Quand OA, OB sont les axes, MN devient la normale, et elle coupe dans un rapport constant l'abscisse OP.

147. Si

$$c^2 + d^2 = 1$$

et

$$(6) \quad OC \simeq cOA + dOB, \quad OD \simeq -dOA + cOB,$$

ces droites OC, OD, dont chacune est parallèle (145) à la tangente menée par l'extrémité de l'autre, sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse.

En effet, on déduit des équipollences (6)

$$OA \simeq cOC - dOD, \quad OB \simeq dOC + cOD,$$

et, substituant,

$$OM \simeq (cx + dy)OC + (cy - dx)OD,$$

équipollence de la même forme que

$$OM \simeq \cos t OA + \sin t OB,$$

car il est facile de vérifier que l'on a

$$(cx + dy)^2 + (cy - dx)^2 = 1.$$

La première expression de la règle XII (57) nous montre immédiatement que les aires des triangles OCD, OAB sont égales entre elles.

148. Entre deux demi-diamètres conjugués a lieu (147) l'équipollence

$$(OC)^2 + (OD)^2 \simeq (OA)^2 + (OB)^2;$$

par suite, en posant

$$(7) \quad (OA)^2 + (OB)^2 \simeq (OF)^2,$$

nous déterminerons deux points indépendants du choix des diamètres. Ces points remarquables F, F₁ sont les foyers de l'ellipse.

L'équipollence

$$(OA)^2 \simeq (OF - OB)(OF + OB),$$

laquelle, au moyen de $OF \simeq -OF_1$, et en vertu de la règle I, se transforme en

$$(OA)^2 \simeq -BF \cdot BF_1,$$

nous montre que : *en un point quelconque B de l'ellipse, les deux rayons vecteurs BF, BF₁ forment des angles*

égaux avec la tangente à la courbe, et leur produit est égal au carré du demi-diamètre OA parallèle à cette tangente.

149. Le problème consistant à trouver les foyers d'une ellipse, étant donnés deux demi-diamètres conjugués, est directement résolu par l'équipollence (7). On peut la construire de plusieurs manières : ayant déterminé la droite OE (146), on a

$$(OF)^2 \simeq OA (OA + OE) \simeq A_1 O . A_1 E;$$

par suite, l'excentricité OF sera moyenne proportionnelle entre OA et $A_1 E$, et parallèle à la bissectrice de l'angle $O A_1 E$.

Observant également que

$$(OF)^2 \simeq (OB + \sqrt{OA})(OB - \sqrt{OA}),$$

il suffira de mener BK, BK_1 perpendiculaires et égales au demi-diamètre OA, et l'on aura

$$ON \simeq \pm \sqrt{OK . OK_1}.$$

Donc l'excentricité est aussi moyenne proportionnelle entre OK, OK_1 , et bissectrice de l'angle de ces deux droites.

150. Si l'on prend, sur l'une des droites OK, OK_1 , la longueur

$$OL \simeq \gamma OK \simeq \gamma (OB + BK),$$

on aura

$$LM \simeq x OA - \gamma BK \simeq (x - \gamma \sqrt{OA}).$$

Or $x - \gamma \sqrt{OA}$, puisque $x^2 + \gamma^2 = 1$ exprime une droite égale à l'unité; par suite, LM est égale à OA.

On prolonge LM jusqu'à sa rencontre avec OA en I; il faudra donc joindre à

$$OL \simeq \gamma (OH + HK)$$

une parallèle à

$$LM \propto x OA - y BK,$$

telle que OI ait la même direction que OA, c'est-à-dire que OH; et comme HK, BK ont la même direction, il en résulte que LI s'obtiendra en multipliant LM par le rapport numérique HK : BK, en sorte que

$$OI \propto y OH + x OA. HK : BK.$$

Ayant établi tout à l'heure que

$$gr. LM = gr. OA = gr. BK,$$

il en résulte que

$$gr. LI = gr. HK.$$

Par suite : *l'ellipse est décrite par le point M de la droite IL de longueur constante, qui se meut entre les droites fixes OA, OK.*

151. Dans le mouvement exprimé par l'équipollence

$$OM \propto \cos t OA + \sin t OB,$$

la vitesse est donnée en grandeur et en direction par la première dérivée par rapport au temps t

$$MT \propto -\sin t OA + \cos t OB.$$

La seconde dérivée est

$$-\cos t OA - \sin t OB \propto MO.$$

Cette expression, étant la dérivée de la vitesse, peut être appelée *l'accélération du mouvement* (*); elle égale,

(*) Nous traduisons par *accélération* le mot italien *turbazione*, peut-être plus expressif, en ce qu'il n'implique pas l'idée d'une *augmentation* de vitesse; mais nous tenons à n'employer, autant que possible, que des expressions bien connues dans le langage mathématique en France.

(Note du Traducteur.)

en grandeur et en direction, ce qu'on nomme la *force accélératrice*. La précédente équipollence nous montre que l'accélération du mouvement est exprimée par le demi-diamètre de l'ellipse, de sorte que ce mouvement est celui d'un point attiré par un centre en raison directe de la distance.

(*A suivre.*)