

MOURGUE

**Expressions de $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction
de $\sin a$ ou $\cos a$ seulement**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 408-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_408_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**EXPRESSIONS DE $\sin ma$ ET $\cos ma$ EN FONCTION
DE $\sin a$ OU $\cos a$ SEULEMENT ;**

PAR M. MOURGUE.

On se propose de déduire ces expressions des formules ordinaires

$$\sin ma = 2 \cos a \sin(m-1)a - \sin(m-2)a,$$

$$\cos ma = 2 \cos a \cos(m-1)a - \cos(m-2)a.$$

I.

Ces expressions sont une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque trois termes consécutifs de la suite indéfinie $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \dots$ sont liés par la relation $A_n = KA_{n-1} - A_{n-2}$, où K désigne une quantité fixe, un terme quelconque a pour valeur*

$$A_m = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1} K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} K^{m-5} \right. \\ \left. - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} K^{m-7} \dots \right] A_1 \\ - \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1} K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2} K^{m-6} \right. \\ \left. - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} K^{m-8} \dots \right] A_0,$$

formule dans laquelle les premiers facteurs des numérateurs sont des entiers successifs décroissants.

En effet, les premières applications de la relation énoncée donnent

$$\begin{aligned} A_2 &= KA_1 - A_0, \\ A_3 &= (K^2 - 1) A_1 - KA_0, \\ A_4 &= (K^3 - 2K) A_1 - (K^2 - 1) A_0. \end{aligned}$$

Je dis que, en continuant les calculs indéfiniment :

1° Les seconds membres des égalités resteront des fonctions linéaires de A_1 et A_0 ;

2° Le coefficient de A_0 dans une égalité restera égal et de signe contraire à celui de A_1 dans l'égalité précédente ;

3° Les coefficients P_{n-2}, P_{n-1}, P_n de A_1 , dans trois éga-

lités consécutives, auront entre eux la même relation que les premiers membres, savoir :

$$P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}.$$

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives vérifient 1° et 2° :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A_{n-1} = P_{n-2} A_1 - P_{n-3} A_0, \\ A_n = P_{n-1} A_1 - P_{n-2} A_0. \end{cases}$$

De la seconde on déduit

$$A_{n+1} = P_{n-1} A_2 - P_{n-2} A_1,$$

d'où, en remplaçant A_2 par sa valeur,

$$(\beta) \quad \begin{cases} A_{n+1} = (P_{n-1}K - P_{n-2})A_1 - P_{n-1}A_0 \\ \text{et, par suite,} \\ P_n = P_{n-1}K - P_{n-2}. \end{cases}$$

La comparaison des égalités (α) et (β) met en évidence 1°, 2° et 3°.

Remarque. — En vertu de 2°, pour avoir un terme quelconque de la suite $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$, il suffira de trouver la loi des coefficients de A_1 .

Loi de formation des coefficients de A_1 . — La relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$ donne, pour les premiers coefficients de A_1 , le tableau suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = K, \\ P_2 = K^2 - 1, \\ P_3 = K^3 - 2K, \\ P_4 = K^4 - 3K^2 + 1, \\ P_5 = K^5 - 4K^3 + 3K. \end{cases}$$

(On a mis en tête l'égalité conventionnelle $P_0 = 1$ pour faciliter les énoncés ultérieurs.)

Dans ce tableau indéfiniment prolongé :

1° Les seconds membres seront des fonctions alternées de puissances descendantes et de même parité de K ;

2° En ce qui concerne les valeurs absolues, le coefficient d'une puissance de K s'obtient en ajoutant celui qui le surmonte d'un rang au voisin de gauche de celui qui le surmonte de deux rangs.

3° Cette règle se transforme en la suivante :

Un coefficient placé dans une colonne verticale (sauf la première), et appartenant à la $n^{\text{ième}}$ ligne horizontale, est égal à la somme des coefficients de la colonne précédente, arrêtée à la $(n - 2)^{\text{ième}}$ ligne horizontale.

Pour le démontrer, admettons que deux égalités consécutives du tableau vérifient 1° :

$$P_{n-2} = K^{n-2} - a_{n-2} K^{n-4} + b_{n-2} K^{n-6} - c_{n-2} K^{n-8} \dots,$$

$$P_{n-1} = K^{n-1} - a_{n-1} K^{n-3} + b_{n-1} K^{n-5} - c_{n-1} K^{n-7} \dots$$

D'après la relation $P_n = KP_{n-1} - P_{n-2}$, on en déduit

$$(\gamma) \left\{ \begin{array}{l} P_n = K^n - (a_{n-1} + 1) K^{n-2} + (b_{n-1} + a_{n-2}) K^{n-4} \\ \quad - (c_{n-1} + b_{n-2}) K^{n-6} \dots, \\ \text{et par suite} \\ a_n = a_{n-1} + 1, \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-2}, \quad c_n = c_{n-1} + b_{n-2} \dots, \end{array} \right.$$

ce qui met en évidence 1° et 2°.

Enfin, des égalités

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}, \quad b_{n-1} = b_{n-2} + a_{n-3}, \quad b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-4} \dots,$$

on déduit, par addition,

$$b_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \dots,$$

et de même

$$c_n = b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + \dots,$$

ce qui établit 3°.

(412)

Cela posé, dans la $m^{i\grave{e}me}$ égalité du tableau (1), savoir :

$$P_{m-1} = K^{m-1} - a_{m-1} K^{m-3} + b_{m-1} K^{m-5} - c_{m-1} K^{m-7} \dots,$$

on aura, d'après 3°,

$$a_{m-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \frac{m-2}{1},$$

$$b_{m-1} = \frac{m-4}{1} + \frac{m-5}{1} + \frac{m-6}{1} + \dots = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2},$$

$$c_{m-1} = \frac{(m-5)(m-6)}{1.2} + \frac{(m-6)(m-7)}{1.2} + \dots$$

$$= \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3},$$

... .. ;

et comme

$$A_m = P_{m-1} A_1 + P_{m-2} A_0,$$

on aura finalement

$$A_m = \left[K^{m-1} - \frac{m-2}{1} K^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} K^{m-5} \right. \\ \left. - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3} K^{m-7} + \dots \right] A_1 \\ - \left[K^{m-2} - \frac{m-3}{1} K^{m-4} + \frac{(m-4)(m-5)}{1.2} K^{m-6} \right. \\ \left. - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3} K^{m-8} + \dots \right] A_0.$$

II.

1° Puisque $\sin ma$, $\sin(m-1)a$, $\sin(m-2)a$ sont liés par la relation

$$\sin ma = K \sin(m-1)a - \sin(m-1)a, \quad \text{où } K = 2 \cos a,$$

en posant, dans l'égalité précédente,

$$A_m = \sin ma, \quad A_1 = \sin a, \quad A_0 = 0, \quad K = 2 \cos a,$$

il vient

$$(S) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin ma}{\sin a} &= (2 \cos a)^{m-1} - \frac{m-2}{1} (2 \cos a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \cos a)^{m-7} \dots, \end{aligned} \right.$$

formule que donne $\sin ma$ en fonction de $\cos a$ pour toute valeur entière de m .

En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\sin ma}{\cos a}, \\ &- \frac{\sin ma}{\cos a}, \end{aligned} \right\} \text{ pour } m = \begin{cases} 4p+2, \\ 4p, \end{cases}$$

et

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\cos ma}{\cos a}, \\ &- \frac{\cos ma}{\cos a}, \end{aligned} \right\} \text{ pour } m = \begin{cases} 4p+1, \\ 4p-1. \end{cases}$$

Donc on aura, pour m pair,

$$(S_2) \left\{ \begin{aligned} &(\sqrt{-1})^{m+2} \frac{\sin ma}{\cos a} \\ &= (2 \sin a)^{m-1} - \frac{m-1}{1} (2 \sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} (2 \sin a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \sin a)^{m-7} \dots, \end{aligned} \right.$$

et, pour m impair,

$$(C_1) \left\{ \begin{aligned} & (\sqrt{-1})^{m-1} \frac{\cos ma}{\cos a} \\ &= (2 \sin a)^{m-1} - \frac{m-2}{1} (2 \sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} (2 \sin a)^{m-5} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3} (2 \sin a)^{m-7} \dots, \end{aligned} \right.$$

2° Si, dans l'égalité qui donne A_m , on pose

$$A_m = \cos ma, \quad A_1 = \cos a, \quad A_0 = 1, \quad K = 2 \cos a,$$

il vient, en doublant les deux membres,

$$\begin{aligned} 2 \cos ma &= (2 \cos a)^m - \frac{m-2}{1} (2 \cos a)^{m-2} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} (2 \cos a)^{m-4} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3} (2 \cos a)^{m-6} + \dots \\ &- 2 (2 \cos a)^{m-2} + 2 \frac{m-3}{2} (2 \cos a)^{m-4} \\ &- 2 \frac{(m-4)(m-5)}{1.2} (2 \cos a)^{m-6} + \dots \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \frac{(m-p-1)(m-p-2)\dots(m-2p)}{1.2\dots p} \\ &+ 2 \frac{(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{1\dots(p-1)} \\ &= \frac{m(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{1.2\dots p}; \end{aligned}$$

donc

$$2 \cos ma = (2 \cos a)^m - \frac{m}{1} (2 \cos a)^{m-2} + \frac{m}{1} \frac{m-3}{2} (2 \cos a)^{m-4} \\ - \frac{m}{1} \frac{(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3} (2 \cos a)^{m-6} \\ + \frac{m}{1} \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} (2 \cos a)^{m-8} + \dots$$

En divisant les deux membres par $2 \cos a$, on obtient

$$(C) \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos ma}{\cos a} &= (2 \cos a)^{m-1} - \frac{m}{1} (2 \cos a)^{m-3} \\ &+ \frac{m}{1} \frac{m-3}{2} (2 \cos a)^{m-5} \\ &- \frac{m}{1} \frac{(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3} (2 \cos a)^{m-7} \\ &+ \frac{m}{1} \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} (2 \cos a)^{m-9} + \dots, \end{aligned} \right.$$

formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$ pour m entier pair ou impair. En y remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, le premier membre devient

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{\sin ma}{\sin a}, \\ & + \frac{\sin ma}{\sin a}, \end{aligned} \right\} \text{ pour } m = \begin{cases} 4p - 1, \\ 4p + 1, \end{cases}$$

et

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\cos ma}{\sin a}, \\ & - \frac{\cos ma}{\sin a}, \end{aligned} \right\} \text{ pour } m = \begin{cases} 4p, \\ 4p + 2; \end{cases}$$

donc, pour m impair,

$$(S_2) \left\{ \begin{aligned} (\sqrt{-1})^{m-1} \frac{\sin ma}{\sin a} &= (2 \sin a)^{m-1} - \frac{m}{1} (2 \sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{m}{1} \frac{m-3}{2} (2 \sin a)^{m-5} \\ &- \frac{m}{1} \frac{(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2} (2 \sin a)^{m-7} + \dots, \end{aligned} \right.$$

et, pour m pair,

$$(C_2) \left\{ \begin{aligned} (\sqrt{-1})^m \frac{\cos ma}{\sin a} &= (2 \sin a)^{m-1} - \frac{m}{1} (2 \sin a)^{m-3} \\ &+ \frac{m}{1} \frac{m-3}{2} (2 \sin a)^{m-5} \\ &- \frac{m}{1} \frac{(m-4)(m-3)}{1.2} (2 \sin a)^{m-7} + \dots \end{aligned} \right.$$

III.

Le même théorème donne la valeur de $x^m - \frac{1}{x^m}$ et de $x^m + \frac{1}{x^m}$, en fonction de $x + \frac{1}{x}$.

Puisque

$$x^m - \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^{m-1} - \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} - \frac{1}{x^{m-2}}\right),$$

en posant

$$A_m = x^m - \frac{1}{x^m}, \quad A_1 = x - \frac{1}{x}, \quad A_0 = x^0 - \frac{1}{x^0} = 0$$

et

$$-K = x + \frac{1}{x},$$

on aura,

$$\begin{aligned} \frac{x^m - \frac{1}{x^m}}{x - \frac{1}{x}} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-1} - \frac{m-2}{1} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-3} \\ &+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-5} - \dots \end{aligned}$$

De même, ayant

$$x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right),$$

en posant .

$$A_m = x^m + \frac{1}{x^m}, \quad A_1 = x + \frac{1}{x}, \quad A_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$$

et

$$K = x + \frac{1}{x},$$

on aura

$$\begin{aligned} x^m + \frac{1}{x^m} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^m - \frac{m}{1} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-2} \\ &\quad + \frac{m}{1} \frac{m-3}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-4} \\ &\quad - \frac{m}{1} \frac{(m-3)(m-5)}{1 \cdot 2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{m-6} + \dots \end{aligned}$$

Nota. — Dans la formule qui donne $2 \cos ma$, on a divisé les deux membres par $2 \cos a$, pour donner la même physionomie à toutes les formules. Comme le second membre n'est divisible par $2 \cos a$ que dans le cas de m impair, il en résulte que, dans le cas de m pair, le dernier terme de la formule suivante contiendra $2 \cos a$, avec l'exposant -1 .

Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\cos 8a}{\cos a} &= (2 \cos a)^7 - \frac{8}{1} (2 \cos a)^5 + \frac{8}{1} \frac{5}{3} (2 \cos a)^3 \\ &\quad - \frac{8}{1} \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3} (2 \cos a)^1 + \frac{8}{1} \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} (2 \cos a)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos 8a = 128 \cos^8 a - 256 \cos^6 a + 160 \cos^4 a - 32 \cos^2 a + 1.$$