

GEORGES DOSTOR

Rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre en fonction des arêtes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12 (1873), p. 370-374

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_370_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_370_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES;

PAR M. GEORGES DOSTOR,

Docteur ès sciences.

Soient S, A, B, C les quatre sommets du tétraèdre. Représentons par a, b, c les trois arêtes SA, SB, SC issues du sommet S, et par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles BSC, CSA, ASB de ces arêtes.

Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les droites SA, SB, SC pour les axes OX, OY, OZ.

Désignons par x, y, z les coordonnées du centre O de la sphère circonscrite et par R le rayon de cette sphère. Le centre O sera le point d'intersection des trois plans élevés sur les milieux des arêtes a, b, c , perpendiculairement à ces arêtes ; par conséquent $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ seront les projections orthogonales du rayon SO = R sur les trois axes des coordonnées OX, OY, OZ, de sorte que, si α, β, γ sont les inclinaisons de SO sur ces trois axes, nous avons

$$(1) \quad a = 2R \cos \alpha, \quad b = 2R \cos \beta, \quad c = 2R \cos \gamma.$$

Cela posé, projetons le rayon SO et la ligne brisée $x + y + z$ successivement sur SO et sur les trois axes de coordonnées ; nous obtenons les équations

$$- R + x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

$$- R \cos \alpha + x + y \cos \nu + z \cos \mu = 0,$$

$$- R \cos \beta + x \cos \nu + y + z \cos \lambda = 0,$$

$$- R \cos \gamma + x \cos \mu + y \cos \lambda + z = 0,$$

qui, devant être compatibles, exigent que l'on ait le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la relation qui existe entre les six angles que forment entre elles quatre droites SO, SA, SB, SC issues d'un même point S.

Dans ce déterminant, mettons à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{a}{2R}$, $\frac{b}{2R}$, $\frac{c}{2R}$ tirées des égalités (1); l'équation précédente deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2R} & \frac{b}{2R} & \frac{c}{2R} \\ \frac{a}{2R} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{b}{2R} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{c}{2R} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en multipliant la première ligne et la première colonne chacune par $2R$,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donne la valeur de R en fonction des trois arêtes a , b , c issues du même sommet S et des inclinaisons mutuelles λ , μ , ν de ces arêtes. On en tire, en

effet,

$$4R^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant et développant,

$$(II) \quad \begin{cases} 4R^2 \Delta = a^2 \sin^2 \lambda + 2bc (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) \\ \quad + b^2 \sin^2 \mu + 2ca (\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) \\ \quad + c^2 \sin^2 \nu + 2ab (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu). \end{cases}$$

Dans cette expression, Δ représente la quantité

$$1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu.$$

La valeur de $4R^2 \Delta$ peut s'exprimer en fonction des six arêtes du tétraèdre. Représentons, en effet, par a' , b' , c' les trois arêtes BC, CA, AB qui sont respectivement opposées aux arêtes SA = a , SB = b , SC = c . Les triangles SBC, SCA, SAB nous donnent

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \lambda, \quad b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \mu, \\ c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu,$$

d'où nous tirons

$$\cos \lambda = \frac{b^2 + c^2 - a'^2}{2bc}, \quad \cos \mu = \frac{c^2 + a^2 - b'^2}{2ca}, \quad \cos \nu = \frac{a^2 + b^2 - c'^2}{2ab}.$$

Substituons ces valeurs dans le second membre de l'équation (II); nous obtenons d'abord

$$4a^2 b^2 c^2 [a^2 \sin^2 \lambda + 2bc (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda)] \\ = 2b^2 b'^2 c'^2 - a^4 a'^4 + (2b^4 c^4 - c^4 a^4 - a^4 b^4) \\ + 2a^2 b^2 c^2 (2a^2 - b^2 - c^2) + 2a^2 a'^2 (2b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \\ - 2b^2 b'^2 (c^2 a^2 + b^2 c^2) - 2c^2 c'^2 (a^2 b^2 + b^2 c^2),$$

puis, par permutation circulaire,

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2c^2[b^2\sin^2\mu + 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)] \\ &= 2c^2c'^2a^2a'^2 - b^4b'^4 + (2c^4a^4 - a^4b^4 - b^4c^4) \\ &\quad + 2a^2b^2c^2(2b^2 - c^2 - a^2) + 2b^2b'^2(2c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2) \\ &\quad - 2c^2c'^2(a^2b^2 + c^2a^2) - 2a^2a'^2(b^2c^2 + c^2a^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2c^2[c^2\sin^2\nu + 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] \\ &= 2a^2a'^2b^2b'^2 - c^4c'^4 + (2a^4b^4 - b^4c^4 - c^4a^4) \\ &\quad + 2a^2b^2c^2(2c^2 - a^2 - b^2) + 2c^2c'^2(2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &\quad - 2a^2a'^2(b^2c^2 + a^2b^2) - 2b^2b'^2(c^2a^2 + a^2b^2). \end{aligned}$$

Ajoutant ces trois dernières égalités membre à membre et réduisant, nous trouvons que le second membre de l'équation (II), multiplié par $4a^2b^2c^2$ est égal à

$$2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4;$$

il nous vient donc

$$(III) \quad R^2 = \frac{2b^2b'^2c^2c'^2 + 2c^2c'^2a^2a'^2 + 2a^2a'^2b^2b'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4}{16a^2b^2c^2\Delta},$$

ou

$$(IV) \quad R^2 = \frac{(aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa')(cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc')}{16a^2b^2c^2\Delta}.$$

Cette expression peut s'écrire sous forme de déterminant

$$(V) \quad 16a^2b^2c^2\Delta R^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on observe que le volume V du tétraèdre est donné par

$$36V^2 = a^2b^2c^2\Delta,$$

(354)

on trouve que

$$576 V^2 R' = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$(VI) \left\{ \begin{array}{l} 24 VR \\ = \sqrt{(aa' + bb' + cc')(bb' + cc' - aa')(cc' + aa' - bb')(aa' + bb' - cc')}. \end{array} \right.$$

Posant

$$aa' + bb' + cc' = 2P^2,$$

on a encore

$$R = \frac{1}{6V} \sqrt{P^2(P^2 - aa')(P^2 - bb')(P^2 - cc')}.$$

Cette dernière expression a été donnée, sans démonstration, par M. BRASSINE, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, t. VI, p. 227, année 1847.