

MORET-BLANC

**Solution d'une question du concours
d'agrégation de 1864**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 357-359

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12_357_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION
DE 1864;**

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, on décrit un cercle sur le grand axe AA' comme diamètre, et l'on mène deux rayons quelconques OD , OE assujettis à faire entre eux un angle constant α . On projette leurs extrémités D et E sur l'ellipse en P et Q par des perpendiculaires au grand axe. Enfin, par l'une de ces projections P , on mène au plan de l'ellipse une perpendiculaire PP' de longueur constante h . On demande le lieu engendré par la droite qui joint le point Q au point P , lorsque le couple de rayons OD , OE prend dans le plan du cercle toutes les positions imaginables.

1. Je prends pour axe des z la perpendiculaire au plan

de l'ellipse, menée par son centre, l'origine étant placée à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus de ce plan, et pour axes des x et des y des parallèles aux axes de l'ellipse.

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse, β et $\alpha + \beta$ les angles que les rayons OD et OE font avec OA; les coordonnées de P' sont $a \cos \beta$, $b \sin \beta$, $\frac{h}{2}$; celles de Q sont $a \cos (\alpha + \beta)$, $b \sin (\alpha + \beta)$, $-\frac{h}{2}$. Les équations de la droite P' Q sont donc

$$\frac{x - a \cos \beta}{a \cos (\alpha + \beta) - a \cos \beta} = \frac{y - b \sin \beta}{b \sin (\alpha + \beta) - b \sin \beta} = \frac{z - \frac{1}{2}h}{-h},$$

d'où l'on tire

$$\left(z + \frac{1}{2}h\right) \cos \beta - \left(z - \frac{1}{2}h\right) \cos (\alpha + \beta) = \frac{hx}{a},$$

$$\left(z + \frac{1}{2}h\right) \sin \beta - \left(z - \frac{1}{2}h\right) \sin (\alpha + \beta) = \frac{hy}{b}.$$

Élevant ces équations au carré et ajoutant, β est éliminé, et il vient

$$\left(z + \frac{1}{2}h\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}h\right)^2 - 2\left(z - \frac{1}{4}h\right) \cos \alpha = h^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

ou

$$2z^2(1 - \cos \alpha) + \frac{h^2}{2}(1 + \cos \alpha) = h^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

que l'on peut écrire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{4z^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{h^2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4}h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1,$$

équation d'un hyperboloïde rapporté à son centre et à ses axes.

2. On arrive presque sans calcul au même résultat de la manière suivante :

Soient toujours les mêmes axes : par le point D, élevons $DD' = h$ perpendiculaire au plan de l'ellipse, et joignons D'E. La plus courte distance des droites D'E et OZ est constante et égale à la distance de la corde DE au centre du cercle, c'est-à-dire à $a \cos \frac{\alpha}{2}$; la ligne D'E a, sur le plan de l'ellipse, une inclinaison constante dont la tangente est $\frac{h}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. Quand l'angle DOE tourne autour du point O, la droite D'E engendre donc un hyperboloïde de révolution à une nappe, dont le cercle de gorge, situé à la distance $\frac{h}{2}$ au-dessus du plan de l'ellipse, a un rayon égal à $a \cos \frac{\alpha}{2}$, hyperboloïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4} h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1.$$

La surface engendrée par P'Q s'en déduit, en réduisant les y dans le rapport $\frac{b}{a}$. On obtiendra donc son équation en remplaçant dans la précédente y par $\frac{a}{b}y$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4} h^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1.$$