

A. KORKINE

G. ZOLOTAREFF

Sur un certain minimum

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 337-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN CERTAIN MINIMUM;

PAR MM. A. KORKINE ET G. ZOLOTAREFF,

Professeurs à l'Université de Saint-Petersbourg.

1. Soit $f(x)$ une fonction entière de x de la forme

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant des constantes réelles.

En désignant par

[A]

la valeur absolue de la quantité réelle A, nous nous proposons de déterminer les coefficients

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

de $f(x)$, de sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx$$

ait la valeur minimum.

2. En supposant maintenant que, de tous les polynômes du $n^{ième}$ degré de la forme (1), $f(x)$ soit celui pour lequel l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx$$

est minimum, nous allons démontrer que toutes les n racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

On voit d'abord que cette équation n'a pas de racines imaginaires.

En effet, en supposant

$$f(x) = \{ (x - \alpha)^2 + \beta^2 \}^p f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant un polynôme du degré $n - 2p$, qui n'est pas divisible par

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

et p un nombre entier positif, on aura

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx = \int_{-1}^{+1} \{ (x - \alpha)^2 + \beta^2 \}^p [f_1(x)] dx.$$

Or, la quantité β étant différente de zéro, on peut diminuer β^2 sans changer la forme (1) du polynôme $f(x)$, et, par suite, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum, contrairement à notre supposition.

On verra de la même manière que toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont comprises entre -1 et $+1$.

En effet, si l'on avait

$$f(x) = (x - \alpha)^p F(x),$$

α étant supérieur à 1 en valeur absolue, p un nombre entier positif et $F(x)$ un polynôme entier du degré $n - p$, on pourrait diminuer la valeur absolue de α et, par suite, celle de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

qui est égale à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha] - x\}^p [F(x)] dx$$

dans le cas de α positif, et à

$$\int_{-1}^{+1} \{[\alpha] + x\}^p [F(x)] dx$$

si α est négatif; ce qui est impossible en vertu de la supposition.

Il ne sera pas non plus difficile de démontrer que l'équation

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines inégales.

Supposons

$$f(x) = (x - \alpha)^2 F_1(x),$$

α étant compris entre -1 et $+1$, et $F_1(x)$ un polynôme du degré $n - 2$, qui peut être encore divisible par $x - \alpha$.

Considérons la fonction

$$f_1(x) = \{ (x - \alpha)^2 - h^2 \} F_1(x),$$

où h est une quantité infiniment petite. Comme la valeur absolue de

$$(x - \alpha)^2 - h^2$$

est moindre que celle de

$$(x - \alpha)^2,$$

si x n'est pas compris entre

$$\alpha - h \quad \text{et} \quad \alpha + h$$

et la différence

$$(x - \alpha)^2 - \{ (x - \alpha)^2 - h^2 \}$$

ou h^2 , l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f_1(x)] dx$$

est inférieure à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

et leur différence est une quantité infiniment petite du second ordre par rapport à h ; car les intégrales

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f(x)] dx, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h} [f_1(x)] dx$$

sont du troisième ordre.

Donc, en variant infiniment peu les coefficients de $f(x)$, on diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx,$$

qui ne sera pas, par conséquent, minimum.

Ainsi toutes les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

3. Soient

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n$$

ces racines; on aura

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [f(x)] dx = & (-1)^n \left\{ \int_{-1}^{\alpha_1} f(x) dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx \right. \\ & + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x) dx - \dots \\ & \left. + (-1)^n \int_{\alpha_n}^1 f(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

En désignant, pour abréger, la formule

$$\int_{-1}^{\alpha_1} \varphi(x) dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x) dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi(x) dx - \dots \\ + (-1)^n \int_{\alpha_n}^1 \varphi(x) dx$$

par

$$S \varphi(x) dx,$$

il viendra

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx = (-1)^n S f(x) dx.$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx$$

peut être considérée comme fonction des coefficients

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

car les racines

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

en sont également des fonctions.

On déterminera les valeurs de

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

qui rendent l'intégrale

$$(-1)^n S f(x) dx$$

minimum, par les équations

$$\frac{\partial S f(x) dx}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S f(x) dx}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial S f(x) dx}{\partial a_n} = 0,$$

d'après les règles connues du Calcul différentiel.

En effectuant les différentiations, on aura

$$S x^{n-1} dx = 0, \quad S x^{n-2} dx = 0, \dots, \quad S dx = 0.$$

Il en résulte que les deux suites

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1, & \alpha'_2, & \alpha_3, & \alpha'_4, & \dots, \\ \alpha'_1, & \alpha_2, & \alpha'_3, & \alpha_4, & \dots \end{array}$$

sont composées des mêmes quantités.

Cela devient évident en remarquant que chacune de ces suites contient les n racines d'une seule et même équation du degré n , ce qui résulte immédiatement des équations (4).

Cela admis, on voit sans difficulté que, en vertu des inégalités (3), on aura

$$x_1 = \alpha'_1, \quad x_2 = \alpha'_2, \dots,$$

et les deux systèmes (3) sont identiques.

5. Nous ferons voir maintenant que la fonction $f(x)$ contient les seuls degrés pairs de x , lorsque n est pair, et les seuls degrés impairs, si n est impair.

En effet, le polynôme

$$(-1)^n f(-x),$$

étant de la forme

$$x^n + \dots,$$

donne encore une solution de la question proposée, car on a

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)] dx = \int_{-1}^{+1} [(-1)^n f(-x)] dx.$$

Donc les racines

$$-\alpha_1, \quad -\alpha_2, \dots, \quad -\alpha_n$$

de l'équation

$$f(-x) = 0$$

satisfont aux équations (2), et, d'après ce qui a été dit

dans le n° 4, elles ne diffèrent que par l'ordre des quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Comme on a

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n,$$

il viendra

$$-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \dots < -\alpha_1.$$

Il s'ensuit

$$\alpha_1 = -\alpha_n, \quad \alpha_2 = -\alpha_{n-1}, \dots$$

Ainsi on aura

$$f(x) = (-1)^n f(-x),$$

quel que soit x , et la proposition énoncée est démontrée.

6. Avant de chercher la solution des équations générales (2), considérons quelques cas particuliers.

Pour $n = 1$, on aura évidemment

$$f(x) = x.$$

Pour $n = 2$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad 2\alpha_1 = -1, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0, \\ f(x) = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Pour $n = 3$, on aura

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = 0, \quad 2\alpha_1^2 = 1, \\ f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x.$$

Pour $n = 4$, on obtient

$$\alpha_1 = -\alpha_4, \quad \alpha_2 = -\alpha_3, \quad 2(\alpha_1 - \alpha_2) = -1, \quad 2(\alpha_1^3 - \alpha_2^3) = -1.$$

On trouve aisément une fonction

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2),$$

quand les deux sommes

$$\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1^3 - \alpha_2^3$$

sont données. En effet, il vient

$$(x - \alpha_1)(x + \alpha_2) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

et, par suite,

$$(x + \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Donc

$$f(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}.$$

Les résultats trouvés sont contenus dans cette formule générale

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \{ (n+1) \arccos x \}}{\sqrt{1-x^2}},$$

que nous allons vérifier.

7. Soit u une fonction de x , qui, étant développée suivant les puissances descendantes de x , commence par le terme

$$\frac{A}{x},$$

où A est une constante différente de zéro. Soit encore $\varphi(x)$ une fonction entière du degré $n+1$, telle que, dans le produit

$$u\varphi(x)$$

développé suivant les puissances descendantes de x , les termes en

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \dots, \quad x^{-(n+1)}$$

manquent. On aura

$$(5) \quad u\varphi(x) = \psi(x)(1 + \varepsilon),$$

(346)

$\psi(x)$ étant une fonction entière du degré n et ε une fonction de la forme

$$\frac{B}{x^{2n+2}} + \frac{C}{x^{2n+3}} + \dots$$

Désignons par

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

les n racines de l'équation

$$\psi(x) = 0.$$

Il viendra

$$\frac{\varphi(x)}{x - c_i} = \text{fonction entière} + \frac{\varphi(c_i)}{x} + \frac{c_i \varphi(c_i)}{x^2} + \frac{c_i^2 \varphi(c_i)}{x^3} + \dots,$$

et de là

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(x)}{x - c_i} &= \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \text{fonction entière} \\ &+ \frac{\sum \varphi(c_i)}{x} + \frac{\sum c_i \varphi(c_i)}{x^2} + \frac{\sum c_i^2 \varphi(c_i)}{x^3} + \dots \end{aligned} \right.$$

Or de l'équation (5) on déduit

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{u'}{u} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi'(x) + \varphi(x) \frac{u'}{u} = \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi(x) \varepsilon'}{1 + \varepsilon}.$$

La fonction

$$\frac{\varphi(x) \varepsilon'}{1 + \varepsilon}$$

étant de la forme

$$\frac{k}{x^{n+2}} + \frac{l}{x^{n+3}} + \dots,$$

il s'ensuit que les termes avec les puissances

$$x^{-1}, \quad x^{-2}, \dots, \quad x^{-(n+1)},$$

dans les développements des deux fonctions

$$\varphi(x) \frac{u'}{u}, \quad \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

suivant les puissances descendantes de x , sont les mêmes.

Ainsi, en ayant égard à l'équation (6), on voit que les sommes

$$\sum \varphi(c_i), \quad \sum c_i \varphi(c_i), \quad \sum c_i^2 \varphi(c_i), \dots, \quad \sum c_i^n \varphi(c_i)$$

sont les coefficients des termes en

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \dots, \quad \frac{1}{x^{n+1}}$$

dans le développement de la fonction

$$\varphi(x) \frac{u'}{u}.$$

8. En faisant maintenant

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

on aura

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n} \cos \{ (n+1) \arccos x \},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \{ (n+1) \arccos x \}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi(x) \frac{u'}{u} = -x \frac{\varphi(x)}{x^2 - 1}.$$

En divisant $\varphi(x)$ par $x^2 - 1$, on aura une équation de la forme

$$\varphi(x) = (x^2 - 1) F(x) + Ax + B,$$

$F(x)$ étant une fonction entière.

On déterminera A et B en faisant dans cette équation

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1;$$

il viendra

$$B - A = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad B + A = \frac{1}{2^n},$$

et, par suite,

$$B = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad A = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

On aura de plus

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) \frac{u'}{u} &= -x \frac{\varphi(x)}{x^2 - 1} = -x F(x) - A - \frac{Bx + A}{x^2 - 1} \\ &= - \left\{ A + x F(x) + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^5} + \frac{A}{x^6} + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

étant

$$\cos \frac{\pi}{n+1}, \quad \cos \frac{2\pi}{n+1}, \quad \cos \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \quad \cos \frac{n\pi}{n+1},$$

faisons

$$\alpha_i = \cos \frac{(n-i+1)\pi}{n+1},$$

et nous aurons

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n,$$

$$\varphi(\alpha_i) = \frac{1}{2^n} (-1)^{n-i+1} = \frac{1}{2^n} (-1)^{n+i+1}.$$

En vertu de la proposition du n° 7, en ayant égard à

l'équation (7), on voit que la somme

$$\sum \alpha_i^\lambda \varphi(\alpha_i) = -\frac{1}{2^n} (-1)^{n+1} \sum (-1)^{i-1} \alpha_i^\lambda$$

est égale à $-B$ si le nombre entier λ est pair, et à $-A$ si λ est impair.

On aura donc

$$-\frac{1}{2^n} (-1)^{n+1} \sum (-1)^{i-1} \alpha_i^\lambda = -\frac{1 + (-1)^{n+1+\lambda}}{2^{n+1}},$$

car le second terme de cette équation se réduit à $-B$ lorsque λ est pair, et à $-A$ dans le cas contraire.

On déduit de là

$$\sum (-1)^{i-1} \alpha_i^\lambda = \frac{(-1)^\lambda + (-1)^{n+1}}{2} = \varepsilon_\lambda.$$

En faisant ici

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, n,$$

on obtient les équations (2), et la formule

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \{ (n+1) \arccos x \}}{\sqrt{1-x^2}}$$

est vérifiée.

9. Dans ce qui précède, nous avons donné la solution complète de la question que nous nous étions proposée. Comme elle a été trouvée par induction, il ne sera pas sans intérêt de la vérifier d'une manière plus directe.

En reprenant les équations

$$S dx = 0, \quad Sx dx = 0, \quad Sx^2 dx = 0, \dots, \quad Sx^{n-1} dx = 0$$

du n° 3, dont la solution comprend celle de la question proposée, on voit facilement que le développement de l'intégrale

$$S \frac{dz}{x-z} = \frac{S dz}{x} + \frac{S z dz}{x^2} + \frac{S z^2 dz}{x^3} + \dots$$

doit commencer, en vertu de ces équations, par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}}.$$

Supposons, en premier lieu, n impair. En faisant, pour abrégér,

$$U = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4) \dots (x - \alpha_{n-1}),$$

$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n),$$

on aura facilement, en effectuant l'intégration,

$$S \frac{dz}{x-z} = \log \frac{U^2(x^2-1)}{V^2} = \log \left\{ 1 + \frac{(x^2-1)U^2 - V^2}{V^2} \right\}.$$

Pour que le développement de

$$S \frac{dz}{x-z}$$

commence par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}},$$

il faut que celui de la fonction

$$\frac{(x^2-1)U^2 - V^2}{V^2}$$

soit de la forme

$$\frac{A}{x^{n+1}} + \frac{B}{x^{n+2}} + \dots$$

Or, V^2 étant un polynôme du degré $n+1$, il faut que la différence

$$(x^2-1)U^2 - V^2$$

ait une valeur constante.

On aura ainsi l'équation indéterminée

$$(x^2-1)U^2 - V^2 = \text{const.}$$

En faisant $x = \cos \varphi$, on tire de là, par des méthodes connues,

$$U = \pm C \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \varphi \right)}{\sin \varphi},$$

$$V = \pm C \cos \left(\frac{n+1}{2} \varphi \right),$$

$$f(x) = UV = \pm \frac{1}{2} C^2 \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi},$$

C étant une constante. Comme la fonction $f(x)$ est de la forme

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots,$$

il viendra

$$\pm \frac{1}{2} C^2 = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour n impair, on a

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \{ (n+1) \arccos x \}}{\cos x}.$$

Soit, en second lieu, n pair. En faisant maintenant

$$U = (x - \alpha_2)(x - \alpha_4) \dots (x - \alpha_n),$$

$$V = (x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_{n-1}),$$

on aura

$$S \frac{dz}{x-z} = \log \frac{(x+1)U^2}{(x-1)V^2} = \log \left\{ 1 + \frac{(x+1)U^2 - (x-1)V^2}{(x-1)V^2} \right\}.$$

En remarquant, comme précédemment, que le développement de

$$S \frac{dz}{x-z}$$

doit commencer par le terme

$$\frac{S z^n dz}{x^{n+1}},$$

et que le polynôme $(x-1)V^2$ est du degré $n+1$, on

conclura que la différence

$$(x + 1) U^2 - (x - 1) V^2$$

est une constante.

On aura de la sorte

$$(x + 1) U^2 - (x - 1) V^2 = \text{const.}$$

En faisant $x = \cos \varphi$, on tire de là, sans difficulté,

$$U = \pm C \frac{\cos \left(\frac{n+1}{2} \varphi \right)}{\cos \frac{\varphi}{2}}, \quad V = \pm C \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \varphi \right)}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$f(x) = UV = \pm C^2 \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi},$$

où C est une constante.

On trouve encore

$$\pm C^2 = \frac{1}{2^n},$$

et l'on aura, comme dans le cas précédent,

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \{ (n+1) \arccos x \}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Notre fonction $f(x)$ appartient à une classe de polynômes qu'on peut définir comme il suit :

Considérons l'intégrale

$$u = \int_{-1}^{+1} \frac{F(z) dz}{x-z},$$

où $F(z)$ est une fonction réelle et positive entre les limites $z = -1$ et $z = +1$, et soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions entières, dont la dernière du degré m , telles que la différence

$$u\varphi(x) - \psi(x),$$

développée suivant les puissances descendantes de x ,

soit de la forme

$$\frac{A}{x^{m+1}} + \frac{B}{x^{m+2}} + \dots$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ constituent deux classes de polynômes, et $f(x)$ appartient à la seconde. En effet, si l'on suppose

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad m = n+1,$$

le polynôme $\psi(x)$ correspondant ne diffère de $f(x)$ que par un facteur constant. Les propriétés des fonctions $\varphi(x)$ ont été étudiées par plusieurs géomètres; celles des polynômes $\psi(x)$ sont jusqu'à présent très-peu connues.

Nous allons démontrer la propriété fondamentale des fonctions $\psi(x)$, qui consiste en ce que *les racines de l'équation*

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et +1. On sait, par la théorie de l'intégrale u , que les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

ont également cette propriété.

Nous empruntons à cette théorie les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} \varphi(z) F(z) dz = 0, \\ \int_{-1}^{+1} z \varphi(z) F(z) dz = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \int_{-1}^{+1} z^{m-1} \varphi(z) F(z) dz = 0, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \psi(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x - z} F(z) dz,$$

sur lesquelles sera fondée notre démonstration.

Désignons par $\nu(x)$ la fonction entière

$$\frac{\varphi(x)}{x - \alpha} = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1},$$

$x - \alpha$ étant un des facteurs de $\varphi(x)$.

Soient encore

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) dz,$$

$$C_1 = \int_{-1}^{+1} z \nu(z) F(z) dz,$$

.....,

$$C_m = \int_{-1}^{+1} z^m \nu(z) F(z) dz.$$

On a entre les C_i des relations simples exprimées par les équations

$$C_i = \alpha C_{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m),$$

car il est évident que la différence

$$\begin{aligned} C_i - \alpha C_{i-1} &= \int_{-1}^{+1} z^{i-1} (z - \alpha) \nu(z) F(z) dz \\ &= \int_{-1}^{+1} z^{i-1} \varphi(z) F(z) dz \end{aligned}$$

s'annule en vertu des équations (8). On obtient de la sorte

$$C_1 = \alpha C_0, \quad C_2 = \alpha C_1 = \alpha^2 C_0, \dots, \quad C_m = \alpha^m C_0.$$

En multipliant les équations

$$C_{m-1} = \alpha^{m-1} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-1} \nu(z) F(z) dz,$$

$$C_{m-2} = \alpha^{m-2} C_0 = \int_{-1}^{+1} z^{m-2} \nu(z) F(z) dz,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$C_1 = \alpha C_0 = \int_{-1}^{+1} z \nu(z) F(z) dz,$$

$$C_0 = C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) dz$$

respectivement par les coefficients

$$A_0, A_1, \dots, A_{m-2}, A_{m-1}$$

de la fonction $\nu(z)$, on aura

$$C_0 \nu(\alpha) = C_0 \varphi'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) dz = \psi(\alpha) \varphi'(\alpha);$$

car on a évidemment, d'après (9),

$$C_0 = \int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) dz = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi'(z)}{z - \alpha} F(z) dz = \psi(\alpha).$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \nu(z) F(z) dz$$

étant positive, on en conclut que $\psi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ sont des quantités de même signe.

Il s'ensuit, en vertu du théorème connu de Rolle, que les racines de l'équation

$$\psi(x) = 0$$

sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$, chaque racine en particulier étant comprise entre deux racines consécutives de l'équation $\varphi(x) = 0$.