

MORET-BLANC

Questions 1112, 1113, 1114, 1115 et 1116

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__278_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS 1112, 1113, 1114, 1115 ET 1116

(voir même tome, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

1112. *Montrer que la développée de l'ellipse peut être considérée comme l'enveloppe d'ellipses concentriques et co-axiales à la proposée.* (C. DE POLIGNAC.)

La développée de l'ellipse

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, comme on sait, pour équation,

$$(2) \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en posant, pour abréger, $\frac{c^2}{a} = a_1$ et $\frac{c^2}{b} = b_1$.

Pour que les ellipses variables

$$(3) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

aient pour enveloppe la développée de la première, il est nécessaire que les paramètres α et β soient liés par une relation telle que, pour $\beta = 0$, $\alpha = \frac{c^2}{a}$, et, pour $\alpha = 0$, $\beta = \frac{c^2}{b}$. La relation la plus simple satisfaisant à cette condition est

$$(4) \quad a\alpha + b\beta = c^2.$$

Différentiant les équations (3) et (4) par rapport à α et β , ajoutant les équations résultantes multipliées respectivement par λ et -1 , et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\alpha$ et de $d\beta$, on a

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda \frac{x^2}{\alpha^3} - a = 0, \\ \lambda \frac{y^2}{\beta^3} - b = 0. \end{cases}$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par α et λ , et ayant égard aux équations (3) et (4), il vient

$$\lambda - c^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = c^2.$$

Les équations (5) donnent ensuite

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\alpha^3} &= \frac{a}{c^2} = \frac{1}{a_1}, \\ \frac{y^2}{\beta^3} &= \frac{b}{c^2} = \frac{1}{b_1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y^2}{\beta^2} = \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ces valeurs, reportées dans l'équation (3), donnent, pour équation de l'enveloppe cherchée,

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

C'est précisément l'équation (2) de la développée de l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Laurens, professeur au lycée de Rouen; Pouja le, professeur au lycée de Nice; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; A. Chervet, élève du lycée de Moulins.

1113. *Le rayon de courbure du point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la demi-différence des axes pour rayon.*
(C. DE POLIGNAC.)

Soient O le centre de l'ellipse, M le point jouissant de la propriété énoncée, C le centre de courbure correspondant. Il faut prouver que le triangle OCM est rectangle en C, et que $OC = a - b$.

Soit ω le paramètre angulaire du point M,

$$OM = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega},$$

le demi-diamètre conjugué $= \sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}$, et

le rayon de courbure en M $= \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

On aura donc

$$\frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}{ab} = (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega = ab.$$

On tire de là

$$\sin^2 \omega = \frac{b}{a+b}, \quad \cos^2 \omega = \frac{a}{a+b}.$$

On a donc

$$OM^2 = \frac{a^2 + b^2}{a+b} = a^2 - ab + b^2,$$

$$CM^2 = \frac{a^2 b + ab^2}{a+b} = ab,$$

$$OM^2 - CM^2 = (a-b)^2.$$

D'ailleurs l'équation de la normale en M étant

$$a \sin \omega x - b \cos \omega y = (a^2 - b^2) \sin \omega \cos \omega,$$

le carré de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale est

$$\frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega} = \frac{(a-b)^2 ab}{ab} = (a-b)^2.$$

Elle tombe donc au point C, qui appartient, par suite, au conjugué du demi-diamètre OM, et de plus le rayon de courbure est tangent à la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec le rayon $a-b$ (*).

(*) Soient OX, OY les directions des axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; DC le rayon de courbure en un point D de cette courbe; ADB la tangente en D, perpendiculaire à DC, et rencontrant en des points A, B les droites OX, OY.

On sait que le rayon de l'ellipse conjugué de OD est parallèle à la tangente ADB, et moyen géométrique entre les segments AD, DB. Donc, si le rayon de courbure DC est égal à ce rayon conjugué, le point C appartient nécessairement à la circonférence décrite sur AB comme diamètre. De plus, la droite CD prolongée rencontrant cette circonférence en un point C', tel que $DC' = DC$, si du point C' on abaisse une perpendiculaire sur OD, on aura, d'après la proposition de Steiner, dont une démonstration géométrique a été donnée (t. X, 2^e série, p. 462),

$$OH \times OD = a^2 + b^2,$$

d'où

$$OD \times DH = a^2 + b^2 - OD^2 = DC^2 = DC \times DC'.$$

L'égalité $OD \times DH = DC \times DC'$ montre que les quatre points O, H,

Note. — La même question a été résolue par MM. Abel Prétet, élève du collège Stanislas; Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne; Poujade, professeur au lycée de Nice; Louis Cauret, professeur au lycée du Mans; E. Laurens, professeur au lycée de Rouen; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; A. Chervet, élève du lycée de Moulins; Bance, maître répétiteur au lycée de Rouen; V. Jamet, élève du lycée de Bordeaux; Bourguet, à Nantes; H. Lez, à Lorrez.

1114. *Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent sur toute normale à l'ellipse des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression.*
(C. DE POLIGNAC.)

1115. *Montrer que l'on peut tracer une infinité d'ellipses concentriques et co-axiales à une ellipse donnée jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être regardés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série.*
(C. DE POLIGNAC.)

1116. *Deux ellipses quelconques de la série inter-*

C, C' sont sur une même circonférence; donc l'angle OCC' est droit et la droite OC est parallèle à ADB. Par conséquent, le point C appartient au diamètre conjugué de OD.

D'autre part, il résulte de la construction bien connue, qui détermine les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués, que $OC = a - b$ et $OC' = a + b$; donc le rayon de courbure DC est tangent à la circonférence décrite du centre O de l'ellipse avec $(a - b)$ pour rayon.

C. Q. F. D.

Remarque. — Soient OP une perpendiculaire menée du point O sur AB, et G l'intersection des diamètres OC', AB; on aura

$$PG = \frac{1}{2} PD = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} (a - b) \quad \text{et} \quad BG = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} OC' = \frac{1}{2} (a + b);$$

il s'ensuit

$$BP = b, \quad PA = a, \quad \text{et} \quad OP = \sqrt{ab}, \quad DC = \sqrt{ab}.$$

La droite AB est le minimum des tangentes à l'ellipse comprises entre les axes de la courbe.
(G.)

ceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant.

(C. DE POLIGNAC.)

Les solutions de ces trois questions résultent immédiatement des théorèmes suivants, démontrés par M. Transon, dans les *Nouvelles Annales* :

1° Si, sur la normale en chaque point d'une ellipse, on porte à partir de ce point, et de part et d'autre, des segments égaux à la moyenne géométrique des deux rayons focaux de ce point, les lieux des extrémités de ces segments sont les deux cercles décrits du centre de l'ellipse avec la demi-somme et la demi-différence des axes pour rayons (*).

Ce théorème résout complètement la question 1114. J'en reproduis ici la démonstration, en faisant usage de la notation de M. Bellavitis.

Soient O le centre de l'ellipse, C et C' les deux foyers, Z un point quelconque de la courbe; représentons les droites OC, OC', OZ par c , $-c$ et z .

On aura, dans les triangles OCZ, OC'Z,

$$CZ \simeq z - c, \quad C'Z \simeq z + c.$$

La moyenne géométrique entre CZ et C'Z sera $\sqrt{z^2 - c^2}$, dirigée suivant la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, c'est-à-dire suivant la normale.

Soient Y_1, Y_2 les extrémités des segments; désignons OY_1 et OY_2 par y_1 et y_2 ; on aura

$$y_1 \simeq z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad y_2 \simeq z - \sqrt{z^2 - c^2},$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dy_1}{y_1} \simeq \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \frac{dy_2}{y_2} \simeq -\frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 5.

Or dz , dirigé suivant la tangente, fait avec la normale un angle droit; donc, d'après les principes du calcul directif (ou des équipollences), dy_1 fait aussi un angle droit avec y_1 , et dy_2 fait un angle droit avec y_2 . Les courbes décrites par les points Y_1 et Y_2 sont donc des circonférences concentriques à l'ellipse. En supposant le point Z à l'extrémité du petit axe, les segments deviennent égaux à a , d'où l'on voit que les rayons sont $a + b$ et $a - b$.

2° Si, en chaque point d'une conique à centre et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une nouvelle conique concentrique à la première et de même genre qu'elle (*).

Ce théorème résout les questions 1115 et 1116.

Pour chaque valeur du rapport, on obtient deux coniques correspondantes; si l'inclinaison sur la normale est nulle, toutes les coniques obtenues sont co-axiales à la proposée. Les deux axes de celle-ci font partie de la série (en les limitant toutefois aux sommets de la développée); car les portions de normale comprises entre la courbe et les axes ont respectivement pour longueurs

$$N_x = \frac{b}{a} \sqrt{rr'}, \quad N_y = \frac{a}{b} \sqrt{rr'},$$

r et r' étant les deux rayons vecteurs : elles sont donc proportionnelles à $\sqrt{rr'}$.

Enfin, si $m\sqrt{rr'}$ et $m'\sqrt{rr'}$ sont les segments interceptés par deux ellipses quelconques de la série, ils sont dans le rapport constant $\frac{m}{m'}$.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XII, p. 5.

Note. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Bourguet, à Nantes; Poujade, professeur au lycée de Nice; A. Chervet, élève du lycée de Moulins. La question 1114 l'a été aussi par MM. A. Tourettes, surveillant général au lycée d'Albi; G. Gallard, élève du lycée de Rennes.