Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 12 (1873), p. 26-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__26_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1038

(voir 2e série, t. X, p. 336);

PAR M. LÉON LECORNU,
Élève du lycée de Caen.

Étant donnés en grandeur les quatre côtés d'un quadrilatère plan et la droite qui unit les milieux de deux côtés opposés, trouver l'aire du quadrilatère en fonction de ces cinq droites. Discussion du problème.

Soient ABCD le quadrilatère, S sa surface, MN la droite qui unit les milieux des côtés AC et BD. Prolongeons ces deux côtés jusqu'à leur rencontre au point O, appelons θ leur angle, et posons

$$\mathrm{OM} = x,\quad \mathrm{ON} = y,\quad \mathrm{MA} = c,\quad \mathrm{NB} = d,\quad \mathrm{AB} = a,$$
$$\mathrm{CD} = a',\quad \mathrm{MN} = b;$$

nous avons les relations suivantes :

$$2S=[(x+c)(y+d)-(x-c)(y-d)]\sin\theta=2(dx+cy)\sin\theta,$$

d'où

$$(1)\qquad S=(dx+cy)\sin\theta,$$

$$(2)\qquad x^2+y^2-2xy\cos\theta=b^2,$$

$$(3)\qquad (x-c)^2+(y-d)^2-2(x-c)(y-d)\cos\theta=a^2,$$

$$(4)\qquad (x+c)^2+(y+d)^2-2(x+c)(y+d)\cos\theta=a'^2.$$

Les équations (3) et (4) peuvent s'écrire

$$(c^2+d^2)-2(cx+dy)+2(dx+cy-cd)\cos\theta=a^2-b^2,$$
$$(c^2+d^2)+2(cx+dy)-2(dx+cy+cd)\cos\theta=a'^2-b^2,$$

ou, en ajoutant et retranchant successivement ces deux équations membre à membre,

$$(5)\qquad 2(c^2+d^2)-4cd\cos\theta=a^2+a'^2-2b^2,$$

$$(6)\qquad 4(cx+dy)-4(dx+cy)\cos\theta=a'^2-a^2.$$

De l'équation (5) on tire

$$\cos\theta=\frac{2(c^2+d^2)-(a^2+a'^2-2b^2)}{4cd}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$c-d\cos\theta=m,$$
$$d-c\cos\theta=n,$$

l'équation (6) devient

$$4mx+4ny=a'^2-a^2,$$

d'où

$$y=\frac{a'^2-a^2-4mx}{4n}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), développant et chassant les dénominateurs, il vient

$$16(m^2+n^2+2mn\cos\theta)x^2-8(a'^2-a^2)(m+n\cos\theta)x$$
$$+(a'^2-a^2)^2-16b^2n^2=0;$$

d'où

$$x = \frac{(a'^2 - a^2)(m + n\cos\theta) \pm \sqrt{16(m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta)b^2n^2 - (a'^2 - a^2)^2 n^2 \sin^2\theta}}{4(m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta)}.$$

Si l'on remplace m et n par leurs valeurs, on a

$$x = \frac{(a'^2 - a^2)c\sin\theta \pm (d - c\cos\theta)\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)\sin\theta}.$$

De même on aurait

$$y = \frac{(a'^2 - a^2)d\sin\theta \pm (c - d\cos\theta)\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)\sin\theta};$$

par suite

$$S = (dx + cy)\sin\theta = \frac{2(a'^2 - a^2)cd\sin\theta \pm [d(d - c\cos\theta) + c(c - d\cos\theta)]\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 - a^2)^2}}{4(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)},$$

(7) $$S = \frac{(a'^2 - a^2)cd\sin\theta}{2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{16b^2(c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta) - (a'^2 + a^2)^2},$$

ou enfin, en remplaçant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs en fonction des données,

(8) $$S = \frac{1}{4}\left[\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 + a^2 - 2b^2}\sqrt{(a^2 + a'^2 - 2b^2)(4c^2 + 4d^2 - a^2 - a'^2 + 2b^2) - 4(c^2 - d^2)^2} \pm \sqrt{8b^2(a'^2 + a^2 - 2b^2) - (a'^2 - a^2)^2}\right].$$

Pour que le quadrilatère existe, il faut que $\cos\theta$ soit plus petit que $+1$, c'est-à-dire que l'on ait

$$2(c^2+d^2)-(a^2+a'^2-2b^2)<4cd,$$

ou

$$2(c-d)^2<a^2+a'^2-2b^2.$$

Il faut aussi que $\cos\theta$ soit plus grand que -1, ou

$$2(c+d)^2>a^2+a'^2-2b^2.$$

Il faut enfin que l'on ait

$$8b^2(a'^2+a^2-2b^2)-(a'^2-a^2)^2>0.$$

Si ces trois conditions sont remplies, l'expression (7) est réelle, et par suite il en est de même de l'expression (8).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1081

(voir 2e série, t. XI, p. 192);

PAR M. L. DESMONS,

Professeur au lycée de Troyes.

Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur; trouver le lieu des milieux de ces cordes. (E. LEMOINE.)

I. L'équation de la corde commune au cercle osculateur et à l'ellipse est

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos\alpha-\frac{y}{b}\sin\alpha=\cos2\alpha,$$

α étant le *paramètre angulaire* du point de contact, et le second point d'intersection ayant pour paramètre -3α.

Je pose

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\varphi;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)-\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\sin 2\varphi,$$

ou

$$(2)\qquad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cos\varphi+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\varphi\cos\varphi,$$

équation de même forme que celle de la normale à l'ellipse.

Si l'on pose

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=p,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=q,$$

on peut l'écrire

$$p+q\,\mathrm{tang}\,\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\varphi,\quad \text{ou}\quad p\cot\varphi+q=\frac{4}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Dérivant ces deux équations par rapport à φ, on a successivement

$$\cos^3\varphi=\frac{q}{2^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sin^3\varphi=\frac{p}{2^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$(3)\qquad p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=2;$$

telle est l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires.

On peut la mettre sous une forme plus simple en prenant pour axes les diagonales du rectangle des axes. On a, MP et MQ étant les perpendiculaires abaissées sur OX et OY, et θ étant l'angle XOY des nouveaux axes,

$$MP = Y \sin\theta, \quad MQ = X \sin\theta,$$

$$MP = \frac{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad MQ = \frac{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Ainsi

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -\frac{2Y}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2X}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \qquad X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette courbe a sur les axes quatre points de rebroussement de première espèce, a, a', b, b'. Elle est symétrique par rapport aux axes de l'ellipse et lui est tangente en ses quatre sommets. Les points a, a', b, b' sont sur un cercle de rayon $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$, facile à construire.

II. Les coordonnées du point milieu de la corde sont, en prenant pour axes les axes de l'ellipse,

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2}, \\ y = b\dfrac{(\sin\alpha - \sin 3\alpha)}{2}, \end{cases}$$

ou bien

$$x = a \cos\alpha \cos 2\alpha,$$
$$y = -b \sin\alpha \cos 2\alpha.$$

En élevant au carré ces deux équations et ajoutant, on a

$$\cos^2 2\alpha = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{a}}{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin\alpha = \frac{-\frac{y}{b}}{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En introduisant ces valeurs dans

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

il vient

$$(6)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

Cette courbe a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(7)\qquad \rho = \frac{\frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right)^3}}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux axes; l'origine est un point quadruple dont les tangentes ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0:$$

ce sont les diagonales du rectangle des axes. Si l'on construit l'hyperbole qui a pour axes $2a$, $2b$, l'équation (7) donne une propriété des rayons des trois courbes

$$(8)\qquad \rho\rho''^2 = \rho'^3,$$

ρ, ρ' et ρ'' désignant les rayons de la courbe, de l'ellipse et de l'hyperbole correspondant à un même angle ω.

III. L'équation de l'enveloppe des cordes communes en coordonnées tangentielles s'obtient aisément. L'équation de la corde commune (2) peut, en effet, s'écrire, dans le système des axes OX, OY,

$$(9)\qquad -\frac{Y\cos\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{X\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\varphi\cos\varphi\quad (*),$$

et, en désignant par u, v les coordonnées tangentielles de cette droite, on a

$$\frac{1}{u}=\cos\varphi\sqrt{2(a^2+b^2)},$$

$$\frac{1}{v}=-\sin\varphi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

On tire de là l'équation de la courbe

$$(10)\qquad \frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=2(a^2+b^2);$$

elle est donc de quatrième classe.

N. B. — Voici comment M. Hilaire, professeur à Douai, trouve l'équation de l'enveloppe dont il s'agit :

« L'équation

$$(1)\qquad \frac{x}{a}\cos\alpha-\frac{y}{b}\sin\alpha=\cos 2\alpha$$

de la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)(\cos\alpha-\sin\alpha)+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

ou

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\sin(\alpha+45^\circ)}+\frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\cos(\alpha+45^\circ)}=2^{\frac{3}{2}},$$

(*) Plus simplement, en posant $K=\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

$$\frac{X}{\cos\varphi}-\frac{Y}{\sin\varphi}=K.$$

équation de la forme

$$\frac{X}{\sin\theta} + \frac{Y}{\cos\theta} = c.$$

» Or on sait que l'enveloppe de la droite représentée par cette dernière équation a pour équation

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}};$$

donc, par analogie, l'enveloppe qui nous occupe a pour équation

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.$$

» Cet ingénieux artifice de calcul est indiqué par M. Salmon (*Higher plane Curves*, p. 106). »

Note. — La question 1081 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc; Moreau, lieutenant d'Artillerie de la Marine; Androuski, étudiant à l'Université de Varsovie; R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome; Chervet, élève du lycée de Moulins; Gambey; Pellissier; Brocard; Hilaire; Lenglet, Lez et Kœhler.

Question 1088

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.

(L. DESMONS.)

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse, et ω le paramètre angulaire du point de contact d'un cercle osculateur. Les coordonnées de ce point sont

$$x_1 = a\cos\omega, \quad y_1 = b\sin\omega.$$

La corde commune au cercle et à l'ellipse, ayant même inclinaison sur les axes que la tangente commune, a pour équation

$$y - b\sin\omega = \frac{b\cos\omega}{a\sin\omega}(x - a\cos\omega),$$

ou

$$(1)\qquad bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega),$$

dont la dérivée par rapport à ω est

$$(2)\qquad bx\sin\omega + ay\cos\omega = 4ab\sin\omega\cos\omega.$$

L'élimination de ω entre ces deux équations donnerait celle de l'enveloppe; cette équation a été trouvée (question 1081). Il vaut mieux, pour l'objet qui nous occupe, tirer des équations (1) et (2) les coordonnées d'un point de la courbe. Il vient

$$x = a(\cos^3\omega + 3\sin^2\omega\cos\omega),$$

$$y = b(\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos^2\omega),$$

d'où

$$dx = 3a(\sin\omega\cos^2\omega - \sin^3\omega)\,d\omega.$$

De $\omega = 0$ à $\omega = \frac{\pi}{4}$, dx est positif, et l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x est extérieure à la courbe. De $\omega = \frac{\pi}{4}$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$, dx est négatif, et l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x se compose de l'aire précédente, plus le quart de l'aire cherchée. En appelant A l'aire totale de l'enveloppe, on aura donc $\frac{A}{4}$ en intégrant, de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $-y\,dx$ exprimé en fonction de ω et $d\omega$, ce qui donne

$$\frac{A}{4} = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\omega + 3\sin\omega\cos^2\omega)(\sin^3\omega - \sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega$$

$$= 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^6\omega - 3\cos^4\omega + 2\sin^4\omega - \sin^6\omega)\,d\omega;$$

et, en remarquant que, de o à $\frac{\pi}{2}$, $\sin^2\omega$ et $\cos^2\omega$ passent en sens inverse par les mêmes valeurs, l'expression précédente se réduit à

$$\frac{A}{4} = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^6\omega - \cos^4\omega)\,d\omega$$

$$= 3ab\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\pi - \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}\right) = 3ab\frac{\pi}{8},$$

d'où

$$A = \tfrac{3}{2}\pi ab.$$

Cette aire est les $\frac{3}{2}$ de celle de l'ellipse; par suite, l'aire comprise entre la courbe et l'ellipse est la moitié de l'aire de l'ellipse.

Les coordonnées des points de rebroussement sont

$$x = \pm a\sqrt{2},\quad y = \pm b\sqrt{2}.$$

L'aire du rectangle passant par les quatre points de rebroussement est donc $8ab$, et l'aire comprise entre le périmètre de ce rectangle et la courbe est égale à

$$(8 - \tfrac{3}{2}\pi)ab.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Hilaire, Pellissier, Brocard, Gambey, Androuski, Chervet et Kœhler.

Question 1089

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Trouver le lieu des pôles des cordes communes et la podaire du centre relative à l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et à son cercle osculateur.

(L. DESMONS.)

1. Soient α et β les coordonnées du pôle d'une corde commune

(1) $$bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega);$$

sa polaire

(2) $$b^2\alpha x + a^2\beta y = a^2b^2$$

devant être identique à la corde commune, on aura les équations

$$\frac{b\alpha}{\cos\omega} = -\frac{a\beta}{\sin\omega} = \frac{ab}{\cos^2\omega - \sin^2\omega},$$

entre lesquelles il faut éliminer ω. On en tire

$$\frac{b^2\alpha^2}{\cos^2\omega} = \frac{a^2\beta^2}{\sin^2\omega} = \frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{1} = \frac{a^2b^2}{(\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2},$$

d'où

$$\cos^2\omega = \frac{b^2\alpha^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

$$\sin^2\omega = \frac{a^2\beta^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

et

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = \frac{a^2b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2}{(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)^2},$$

ou, en chassant le dénominateur, et écrivant x et y au lieu de α et β,

$$(a^2y^2 - b^2x^2)^2 = a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2).$$

Le lieu est une courbe du quatrième ordre, tangente à l'ellipse aux quatre sommets, et ayant pour asymptotes les diamètres conjugués égaux de l'ellipse indéfiniment prolongés.

2. La perpendiculaire abaissée du centre sur la corde commune

(1) $$bx\cos\omega - ay\sin\omega = ab(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$$

a pour équation

$$(2) \qquad ax \sin\omega + by \cos\omega = 0.$$

On aura l'équation de la podaire en éliminant ω entre ces deux équations. De l'équation (2) on tire

$$\frac{a^2x^2}{\cos^2\omega} = \frac{b^2y^2}{\sin^2\omega} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{1} = \frac{a^2x^2 - b^2y^2}{\cos^2\omega - \sin^2\omega},$$

d'où

$$\cos\omega = \pm \frac{ax}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}, \quad \sin\omega = \mp \frac{by}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), et élevant les deux membres au carré, on a

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2x^2 + b^2y^2) = (a^2x^2 - b^2y^2)^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 = \frac{(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

La courbe se compose de quatre feuilles symétriques par rapport aux axes, tangentes à l'ellipse aux quatre sommets, et ayant pour tangentes au centre les droites $y = \pm \frac{a}{b} x$, c'est-à-dire les perpendiculaires aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard, Hilaire, Kœhler, Pellissier, Gambey, Chervet, R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome.

Question 1090

(voir 2e série, t. XI, p. 336);

PAR M. A. PELLISSIER,

Capitaine d'Artillerie.

Le triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde du cercle osculateur en un point *de l'ellipse est équivalent au triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde de l'ellipse perpendiculaire au grand axe, menée au point dont le paramètre angulaire est double de celui du point de contact. Maximum de l'aire de ce triangle. Maximum de la longueur de la corde commune.* (L. Desmons.)

Soit MN la corde commune à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et au cercle osculateur en M. Le paramètre angulaire (ou angle excentrique), étant égal à α en ce dernier point, sera au point N égal à -3α.

La surface du triangle OMN, dont le sommet O est le centre de l'ellipse, sera donnée par la formule

$$2S=\begin{vmatrix} b\sin\alpha & a\cos\alpha \\ -b\sin3\alpha & a\cos3\alpha \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\sin3\alpha & \cos3\alpha \end{vmatrix}$$
$$=ab\,(\sin\alpha\cos3\alpha+\cos\alpha\sin3\alpha)=ab\sin4\alpha.$$

Celle du second triangle de l'énoncé sera donnée par

$$2S'=\begin{vmatrix} b\sin2\alpha & a\cos2\alpha \\ -b\sin2\alpha & a\cos2\alpha \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} \sin2\alpha & \cos2\alpha \\ -\sin2\alpha & \cos2\alpha \end{vmatrix}$$
$$=2ab\sin2\alpha\cos2\alpha=ab\sin4\alpha.$$

Ces deux surfaces sont donc bien égales.

Maximum de l'aire de ce triangle. — Le maximum de S aura lieu évidemment pour

$$\sin4\alpha=1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{\pi}{8}.$$

L'aire est alors égale à $\frac{ab}{2}$, ou au huitième du rectangle des axes.

Maximum de la longueur de la corde commune. — La corde MN a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos 2\alpha;$$

en appelant L sa longueur et p la perpendiculaire OP abaissée du sommet sur la base du triangle OMN, on aura

$$2S = pL;$$

donc

$$L = \frac{2S}{p};$$

d'ailleurs

$$p = \frac{ab\cos 2\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}},$$

et par suite

$$L = 2\sin 2\alpha\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Pour avoir le maximum, il suffit d'égaler à zéro la dérivée par rapport à α; on trouve ainsi

$$4\cos 2\alpha\,(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) + c^2\sin^2 2\alpha = 0.$$

Remplaçant $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$ par leurs valeurs en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on arrive, toutes réductions faites, à l'équation

$$a^2\operatorname{tang}^4\alpha - 2c^2\operatorname{tang}^2\alpha - b^2 = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + a^2b^2}}{a^2}.$$

Le signe + convient seul au radical, puisque $\operatorname{tang}^2\alpha$ doit être positif; donc les valeurs de α correspondant au maximum sont données par

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{1}{a}\sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 + a^2b^2}}.$$

On a donc pour α quatre valeurs, ce qui est évident à cause de la symétrie.

La valeur correspondante de L sera égale à

$$\frac{4a^2K(b^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+K^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où l'on a posé

$$K^2 = c^2 + \sqrt{c^4 + a^2b^2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard, Hilaire, Gambey, Moret-Blanc, Androuski, Chervet, Lez et R. de Paolis, étudiant à l'Université de Rome.

Question 1094

(voir 2e série, t. XI, p. 479);

PAR M. V. JAMET,
Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval).

On donne deux coniques dont l'une est fixe et dont l'autre se meut autour du foyer commun. Démontrer que le lieu du point de concours des tangentes communes est un cercle. Si, pour une certaine position de la conique mobile, les tangentes communes sont parallèles, elles le seront pour toutes les positions de cette dernière conique. (E. LEMOINE.)

Soient F le foyer commun, F″ le second foyer de la conique mobile, F′ le second foyer de la conique fixe. Abaissons FA, FB, F′C, F′D et F″E, F″G perpendiculaires sur les tangentes communes. On a, en appelant b et b' les demi-axes non focaux des deux coniques,

$$FA \times F'C = b^2,$$
$$FA \times F''E = b'^2;$$

d'où

$$\frac{F'C}{F''E} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

De même

$$\frac{F'D}{F''G} = \frac{b^2}{b'^2};$$

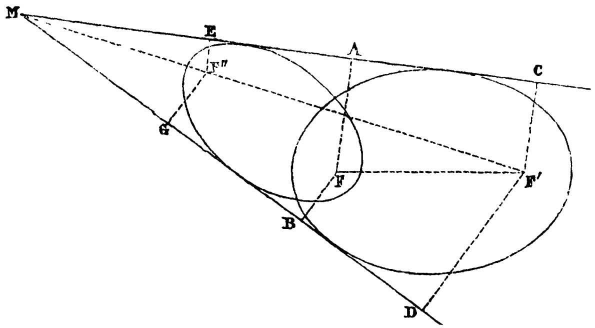
d'où

$$\frac{F'C}{F''E} = \frac{F'D}{F''G}.$$

Les trois points F', F'', M sont donc en ligne droite. De plus, on a

$$\frac{F'M}{F''M} = \frac{F'C}{F''E} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

Or le lieu du point F'' est un cercle décrit du point F comme centre avec la longueur FF'' pour rayon; et le lieu du point M qui, d'après l'égalité précédente, est ho-



mothétique par rapport à F' du lieu du point F'', est un cercle dont le centre se trouvera sur F'F à une distance d de F', telle qu'on aura, en appelant c et c' les demidistances focales des deux coniques,

$$\frac{d}{d - 2c} = \frac{b^2}{b'^2},$$

ou bien

$$d = \frac{2b^2c}{b^2 - b'^2}.$$

De même le rayon R sera donné par l'équation

$$R = \frac{2b^2c'}{b^2 - b'^2}.$$

Si, pour une certaine position de la conique mobile, les deux tangentes communes sont parallèles entre elles, elles seront aussi parallèles à la droite F′F″ qui passe par leur point de concours, et l'on aura

$$F'C = F''E \quad \text{ou bien} \quad F'C \times FA = F''E \times FA,$$

ou encore

$$b^2 = b'^2.$$

Il en résulte que, pour une position quelconque de la conique, on aura

$$F'C \times FA = F''E \times FA,$$

ou

$$F'C = F''E.$$

De même, on aura

$$F'D = F''G,$$

et les deux tangentes communes, étant parallèles à FF″, seront parallèles entre elles.

Note. — Solutions analytiques de MM. G. Launoy et Gambey.

Question 1095

(voir 2ᵉ série, t XI, p. 479),

Par M. H. LEZ.

Le minimum d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les axes, est égal à la demi-somme $(a+b)$ des axes.

La tangente à l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, en un point dont l'abscisse est μ, a pour équation

$$y=\frac{b}{a\sqrt{a^2-\mu^2}}(-\mu x+a^2);$$

elle rencontre l'axe des X à une distance $\frac{a^2}{\mu}$ de l'origine et l'axe des Y à une distance $\frac{ab}{\sqrt{a^2-\mu^2}}$.

Par suite, la longueur de la tangente, comprise entre les axes, est exprimée par

$$l^2=\frac{a^4}{\mu^2}+\frac{a^2b^2}{a^2-\mu^2}\quad\text{ou}\quad l=\sqrt{\frac{a^2(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)}{a^2\mu^2-\mu^4}}.$$

Cherchant maintenant les valeurs de μ qui annulent la dérivée du radical ou

$$l'=\frac{a(b^2\mu^4-a^2\mu^4+2a^4\mu^2-a^6)}{\mu^2(a^2-\mu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^4-a^2\mu^2+b^2\mu^2)}},$$

on aura celles qui rendent la fonction l minimum; elles sont les racines de l'équation

$$b^2\mu^4-a^2\mu^4+2a^4\mu^2-a^6=0\quad\text{ou}\quad\mu=\pm a\sqrt{\frac{a}{a\pm b}}.$$

Or la valeur de μ, qui répond à la question, est

$$a\sqrt{\frac{a}{a+b}}<a;$$

car la dérivée reste négative pour $\mu < a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

Transportant cette valeur dans l'expression de l^2, on a

$$l = a + b \ (*).$$

C. Q. F. T.

Note. — Cette question a été résolue, de même, par MM. H. Heldermann, ancien élève de l'École Polytechnique de Delft; Pierre Arnould, élève du collège Stanislas; Kruschwitz, de Berlin; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; Moret-Blanc.

Question 1096

(voir 2e série, t. XI, p. 479)

PAR M. H. LEZ.

Le maximum de la distance du point de contact d'une tangente à l'ellipse à la projection du centre sur cette tangente est égal à la demi-différence $(a-b)$ des axes.

La tangente à l'ellipse $a^2y + b^2x^2 = a^2b^2$, en un

(*) On arrive au même résultat par le calcul suivant. En désignant par $y = mx + n$ l'équation de la tangente, on a

$$l^2 = n^2 + \frac{n^2}{m^2} = a^2m^2 - b^2 + a^2 + \frac{b^2}{m^2}.$$

Mais le produit de a^2m^2 par $\frac{b^2}{m^2}$ étant une quantité constante a^2b^2, le minimum de la somme $a^2m^2 + \frac{b^2}{m^2}$ est $2ab$. Donc le minimum de l^2 est $2ab + b^2 + a^2$, ou $(a+b)^2$. (G.)

point dont l'abscisse est μ, a pour équation

$$y = \frac{b}{a\sqrt{a^2-\mu^2}}(-\mu x + a^2),$$

et la perpendiculaire abaissée de l'origine est représentée par

$$y = \frac{a\sqrt{a^2-\mu^2}}{\mu b}x.$$

De ces deux équations, on tire facilement les coordonnées du point de rencontre des deux droites; elles sont

$$x_1 = \frac{a^2 b^2 \mu}{a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{a^3 b\sqrt{a^2-\mu^2}}{a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2}.$$

Or, le point de contact ayant pour coordonnées

$$x_2 = \mu, \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\mu^2},$$

la longueur du segment intercepté sur la tangente aura pour expression

$$l^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2,$$

ou

$$l^2 = \frac{b^2\mu^4(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2) + a^2\mu^2(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2)^2}{a^2(a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2)^2},$$

et

$$l = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2(a^2-\mu^2)\mu^2}{(a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2)a^2}}.$$

Cherchant maintenant les valeurs qui annulent la dérivée du radical ou

$$l' = \frac{(a^2-b^2)(a^2\mu^4 - b^2\mu^4 - 2a^4\mu^2 + a^6)}{a(a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^4 - a^2\mu^2 + b^2\mu^2)}},$$

on aura celles qui rendent la fonction l maximum;

elles sont, comme dans le cas précédent, les racines de l'équation

$$a^2\mu^4 - b^2\mu^4 - 2a^4\mu^2 + a^6 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = \pm a\sqrt{\frac{a}{a\pm b}}.$$

Or la valeur de μ, qui répond à la question, est encore

$$a\sqrt{\frac{a}{a+b}} < a;$$

car la dérivée reste positive pour $\mu < a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

Transportant cette valeur dans l'expression de l^2, on trouve

$$l = a - b.$$

C. Q. F. T. (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Pierre Arnould, élève du collége Stanislas; A. Tourrettes, surveillant général au lycée d'Albi; Moret-Blanc.

(*) La question 1096 se ramène à la précédente 1095, en remarquant que le produit d'une tangente comprise entre les axes, par la distance du point de contact à la projection du centre sur cette tangente, est une quantité invariable égale à $a^2 - b^2$. Cette proposition s'établit facilement; car soient A, B les points où la tangente coupe les axes OX, OY; C le point de contact; D la projection du centre sur la tangente; E l'intersection de l'axe OX et d'une normale menée au point C, et OP la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur cette normale. La similitude des triangles rectangles AOB et OPE donne

$$\frac{AB}{OE} = \frac{OA}{OP},$$

d'où

$$AB \times OP = OE \times OA;$$

mais

$$OP = CD;$$

donc

$$AB \times CD = OE \times OA = a^2 - b^2.$$

Le minimum de la tangente étant $a + b$, le maximum de la distance CD est nécessairement $a - b$. (G.)

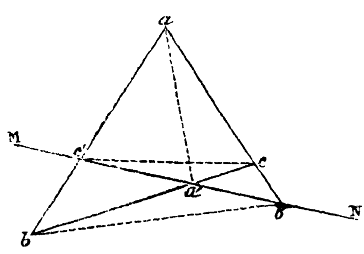
Question 1103

(voir 2e série, t. XI, p 527);

Par M. PELLISSIER,
Capitaine d'Artillerie.

Si a, b, c désignent les sommets d'un triangle et a', b', c' les traces, sur les côtés opposés, des polaires de ces sommets par rapport à une conique, les cercles décrits sur aa', bb', cc' comme diamètres se coupent aux mêmes points. (H. Faure.)

Soit ABC le triangle polaire réciproque de abc par rapport à la conique; on sait que les lignes Aa, Bb, Cc se coupent en un même point; donc les intersections a',



b', c' des côtés de ABC avec les côtés de abc sont sur une droite MN. Or, dans la figure formée par le triangle abc et la transversale MN, nous avons un quadrilatère $aca'c'$ dont aa' et cc' sont les diagonales, et bb' la ligne qui joint les points de rencontre des côtés opposés. Donc (*Géométrie supérieure*, n° 345) les circonférences décrites sur aa', bb', cc' comme diamètres se coupent aux mêmes points.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Gambey.