

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 12
(1873), p. 23-26

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1873_2_12__23_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Doucet, professeur au lycée de Lyon. — Permettez-moi, je vous prie, de revenir un instant sur une question traitée deux fois déjà dans les *Annales*, et qui est la suivante :

Par deux points fixes A et B pris sur une ellipse donnée, on fait passer des cercles variables; on demande le lieu des points M où concourent les tangentes menées à l'ellipse et à chacun des cercles.

Vous avez donné, Monsieur, dans les *Nouvelles Annales* (1^{re} série, t. X, p. 408) une solution géométrique qui ne laisse rien à désirer. En même temps, vous demandiez à vos lecteurs une solution analytique qui, en raison de certaines difficultés, devait être *intéressante et instructive* (*).

M. Breton (de Champ) a donné une solution de cette nature, fondée sur les principes de l'homologie. Cette solution est reproduite par M. Housel, dans son *Introduction à la Géométrie supérieure* (p. 177). « L'analyse ordinaire, dit cet auteur, ne donnerait pas uniquement l'équation du lieu cherché, parce que les quatre tangentes communes que le calcul indique toujours pour deux coniques se coupent deux à deux en six points.... » Il fallait donc avoir recours aux formules de l'homologie pour n'obtenir que le facteur du second degré, qui résout seul la question.

Je vous adresse, Monsieur, une solution analytique

(*) Cette solution a été donnée par MM. Mister et Neuberger, 2^e série, t. II, p. 481; et par M. Paul Serret, 2^e série, t. III, p. 49.

que j'ai eu l'occasion de donner à des élèves de Mathématiques spéciales. Je ne fais usage que de l'analyse la plus ordinaire; c'est un calcul très-simple, dans lequel le besoin de l'homologie ne se fait nullement sentir.

Soit $T = 0$ l'équation du système des deux tangentes menées à l'ellipse par le point $M(\alpha, \beta)$ qui correspond à l'un des cercles.

Soient en outre $P = 0$, $Q = 0$ les polaires de ce point dans l'ellipse et dans le cercle. Ces deux courbes peuvent être représentées par les équations

$$(1) \quad T + \lambda P^2 = 0,$$

$$(2) \quad T + \mu Q^2 = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres à déterminer.

En retranchant, on a

$$P\sqrt{\lambda} = \pm Q\sqrt{\mu},$$

équation d'un système de cordes communes. Prenons, pour la droite AB ,

$$(3) \quad P\sqrt{\lambda} = Q\sqrt{\mu}.$$

Soit maintenant

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse. Alors

$$T = (\beta^2 - b^2)(x - \alpha)^2 - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) \\ + (\alpha^2 - a^2)(y - \beta)^2,$$

$$P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1.$$

Pour identifier les équations (1) et (4), il suffit d'annuler, dans la première, le coefficient de xy ; il en résulte

$$\lambda = a^2 b^2.$$

Soit d'ailleurs $Q = \gamma + px + q$. L'équation (3) devient

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta \gamma}{b^2} - 1 \right) ab = (\gamma + px + q) \sqrt{\mu},$$

et si l'on désigne par x_1, γ_1 les coordonnées à l'origine de la droite AB, on a

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - 1 \right) ab = (px_1 + q) \sqrt{\mu},$$

$$\left(\frac{\beta \gamma_1}{b^2} - 1 \right) ab = (\gamma_1 + q) \sqrt{\mu}.$$

En retranchant, on élimine q , et il vient

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta \gamma_1}{b^2} \right) ab = (px_1 - \gamma_1) \sqrt{\mu},$$

équation où n'entre que le rapport $\frac{\gamma_1}{x_1}$, et qui montre par là que le lieu cherché ne dépend que de la direction de AB.

Soit $m = -\frac{\gamma_1}{x_1}$ le coefficient angulaire de cette direction.

L'équation ci-dessus devient

$$\left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2} \right) ab = (p + m) \sqrt{\mu}.$$

Exprimons maintenant que la courbe (2) est un cercle; il vient

$$\beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu (1 - p^2),$$

$$p = \frac{\alpha \beta}{\mu}.$$

Substituons cette valeur de p dans les deux équations qui précèdent, on a

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta m}{b^2} \right) ab = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\mu}} + m \sqrt{\mu}, \\ \beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2 = \mu - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\mu}, \end{cases}$$

et il faut, entre ces deux équations, éliminer μ . La première donne deux valeurs pour $\sqrt{\mu}$.

1° $\sqrt{\mu} = \beta \frac{a}{b}$. Cette valeur doit être rejetée; car, substituée dans la deuxième des équations (5), elle conduit à $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$, qui n'est autre chose que l'ellipse donnée.

2° $\sqrt{\mu} = \alpha \frac{b}{am}$. Celle-ci donne

$$\frac{\alpha^2}{a^2 m^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 m^2 + b^2}.$$

Telle est l'équation du lieu demandé. C'est une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée.