

HERMITE

Sur l'équation $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 5-8

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$;

PAR M. HERMITE.

On doit à Euler les formules suivantes, qui vérifient identiquement cette équation :

$$\begin{aligned} x &= + (f^2 + 3g^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f'^2 + 3g'^2), \\ y &= - (f^2 + 3g^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f'^2 + 3g'^2), \\ z &= - (f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f^2 + 3g^2), \\ u &= + (f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f^2 + 3g^2), \end{aligned}$$

et M. Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait, sans diminuer leur généralité, les réduire aux expressions plus simples :

$$\begin{aligned} x &= + (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b, \\ y &= - (a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b, \\ z &= + (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1, \\ u &= - (a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1, \end{aligned}$$

où n'entrent que deux indéterminées a et b . Je me propose de tirer ces résultats comme une conséquence de la

propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points peuvent se déterminer individuellement. Soit donc $u = 1$; j'observe qu'en désignant par α une racine cubique imaginaire de l'unité, les droites

$$\begin{aligned}x &= \alpha, & x &= \alpha^2, \\y &= \alpha^2 z, & y &= \alpha z\end{aligned}$$

sont entièrement situées sur la surface

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1.$$

Cela posé, une autre droite, représentée par les équations

$$\begin{aligned}x &= az + b, \\y &= pz + q,\end{aligned}$$

rencontrera chacune de ces génératrices, si l'on a les conditions

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - b}{a} &= \frac{q}{\alpha^2 - p}, \\ \frac{\alpha^2 - b}{a} &= \frac{q}{\alpha - p};\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$p = b, \quad q = \frac{b^2 + b + 1}{a},$$

et les coordonnées z_1, z_2 des points de rencontre seront respectivement les quantités

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{\alpha - b}{a}, \\ z_2 &= \frac{\alpha^2 - b}{a}.\end{aligned}$$

Or l'équation

$$(az + b)^3 + (pz + q)^3 = z^3 + 1$$

devra admettre pour solutions

$$z = z_1, \quad z = z_2;$$

(7)

la troisième racine sera donc une fonction rationnelle des coefficients, qui s'obtient aisément comme il suit.

Développons l'équation en nous bornant aux termes en z^3 et z^2 ; nous en concluons, pour la somme des racines, l'expression

$$z + z_1 + z_2 = 3 \frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Mais on a

$$z_1 + z_2 = \frac{\alpha + \alpha^2 - 2b}{a} = - \frac{1 + 2b}{a};$$

donc

$$z = \frac{1 + 2b}{a} + 3 \frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Il vient ensuite, si l'on remplace p et q par leurs valeurs en a et b ,

$$z = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 - b)}{a(1 - a^3 - b^3)},$$

et de là résultent, pour x et y , les expressions

$$x = \frac{(1 + b + b^2)(1 + 2b) - a^3}{1 - a^3 - b^3},$$

$$y = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 + 2b)}{a(1 - a^3 - b^3)}.$$

Elles se simplifient, si l'on écrit, au lieu de a , $\frac{1}{a}$, et au lieu de b , $\frac{b}{a}$, en prenant ces nouvelles formes, savoir :

$$x = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$y = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$z = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a + b}{a^3 - b^3 - 1};$$

et, en revenant à l'équation homogène

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3,$$

nous obtenons ainsi pour solution :

$$x = (a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1,$$

$$y = (a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b,$$

$$z = (a^2 + ab + b^2)^2 - a + b,$$

$$u = a^3 - b^3 - 1 = (a^2 + ab + b^2)(a - b) - 1.$$

Or il suffit maintenant de changer b en $2b$ et a en $a - b$ pour que ces formules deviennent

$$x = (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,$$

$$y = (a^2 + 3b^2)^2 - a - 3b,$$

$$z = (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,$$

$$u = (a^2 + 3b^2)(a - 3b) - 1.$$

Ce sont précisément celles d'Euler, sauf que x, y, z, u sont remplacés par $z, -y, x$, et $-u$.