

DÉSIRÉ ANDRÉ

Théorème d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 314-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__314_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRE ANDRÉ.

THÉORÈME. — Si l'on désigne par a et n deux nombres entiers quelconques supérieurs à l'unité, le quotient

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(na-1)}{a^n}$$

est fractionnaire si a est premier, entier si a n'est pas premier.

Pour établir ce théorème, nous distinguons deux cas, suivant que a est premier ou ne l'est pas.

1° L'entier a est premier. Désignons par x le nombre qui exprime combien de fois a entre comme facteur au numérateur. Ce nombre est, comme on sait, donné par la formule

$$x = \left(\frac{na - 1}{a} \right) + \left(\frac{na - 1}{a^2} \right) + \left(\frac{na - 1}{a^3} \right) + \dots \\ - \left(\frac{n - 1}{a} \right) - \left(\frac{n - 1}{a^2} \right) - \dots,$$

dans laquelle chaque parenthèse représente la partie entière du quotient qu'elle renferme.

Or on a évidemment

$$\left(\frac{na - 1}{a^2} \right) = \left(\frac{n - 1}{a} \right), \\ \left(\frac{na - 1}{a^3} \right) = \left(\frac{n - 1}{a^2} \right), \\ \left(\frac{na - 1}{a^4} \right) = \left(\frac{n - 1}{a^3} \right),$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne x se réduit à

$$x = \left(\frac{na - 1}{a} \right),$$

ce qui donne

$$x = n - 1.$$

Ainsi le facteur a entre $n - 1$ fois au numérateur. Il entre n fois, c'est-à-dire une fois de plus, au dénominateur. Donc le quotient est fractionnaire, et la première partie du théorème est démontrée.

2° Le nombre a n'est pas premier. Pour démontrer que, dans ce cas, le quotient est entier, nous allons

prouver que tout facteur premier de a entre alors au numérateur autant de fois au moins qu'au dénominateur.

Soit b l'un quelconque des facteurs premiers de a , et β son exposant. Nous aurons

$$a = b^{\beta} q,$$

et b entrera βn fois au dénominateur.

Au numérateur, ce facteur b entrera un nombre de fois γ donné par la formule

$$\begin{aligned} \gamma = & \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b} \right) + \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^2} \right) + \dots \\ & + \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta+1}} \right) + \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta+2}} \right) + \dots \\ & - \left(\frac{n-1}{b} \right) - \left(\frac{n-1}{b^2} \right) - \dots \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\begin{aligned} \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta+1}} \right) & \geq \left(\frac{n-1}{b} \right), \\ \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta+2}} \right) & \geq \left(\frac{n-1}{b^2} \right), \\ \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta+3}} \right) & \geq \left(\frac{n-1}{b^3} \right), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne γ se réduit à

$$\gamma \geq \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b} \right) + \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^2} \right) + \dots + \left(\frac{nb^{\beta}q - 1}{b^{\beta}} \right);$$

d'où l'on tire

$$\gamma \geq nb^{\beta-1}q - 1 + nb^{\beta-2}q - 1 + \dots + nq - 1,$$

et, par suite,

$$\gamma \geq nq \frac{b^{\beta} - 1}{b - 1} - \beta.$$

Il suffit donc, pour établir la seconde partie du théorème, de vérifier que l'inégalité

$$nq \frac{b^\beta - 1}{b - 1} - \beta \geq \beta n$$

est toujours satisfaite lorsque a et n sont supérieurs à l'unité.

Pour faire cette vérification, nous distinguerons deux cas, suivant que β sera égal ou supérieur à l'unité.

Si l'on a $\beta = 1$, l'inégalité se réduit à

$$nq - 1 \geq n,$$

ou bien à

$$q \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Il suffit que q soit supérieur à l'unité. Or il en est forcément ainsi; car, pour que q fût égal à 1 en même temps que β , il faudrait que a fût premier, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle.

Si l'on a $\beta > 1$, l'inégalité peut s'écrire

$$nq (b^\beta - 1) \geq (n + 1)(b - 1)\beta,$$

ou bien, en posant $b = 1 + c$ (ce qui suppose c entier et supérieur à zéro),

$$nq [(1 + c)^\beta - 1] \geq (n + 1)\beta c.$$

Développons $(1 + c)^\beta$, et divisons les deux membres par c ; nous trouvons

$$nq \left[\beta + \frac{\beta(\beta - 1)}{1.2} c + \dots \right] \geq n\beta + \beta,$$

ou bien

$$nq\beta + nq \frac{\beta(\beta - 1)}{1.2} c + \dots \geq n\beta + \beta.$$

Or on a évidemment toujours

$$nq\beta \geq n\beta.$$

De plus, puisque β et n sont tous deux supérieurs à l'unité, on a aussi

$$nq \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} c \geq \beta.$$

Donc l'inégalité qui précède est satisfaite, et la seconde partie du théorème est démontrée.

Remarque. — Il n'y a, dans la démonstration précédente, qu'un seul point où nous ayons eu besoin de supposer $n > 1$. Tout le reste subsiste donc pour $n = 1$. Quant au point considéré, il revient à démontrer que, pour $\beta > 1$, l'on a

$$nq \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} c \geq \beta,$$

ou bien

$$nq(\beta-1)c \geq 2.$$

Si l'on suppose $n = 1$, cette inégalité se réduit à celle-ci

$$q(\beta-1)c \geq 2,$$

qui est toujours satisfaite, excepté dans le cas unique où l'on a en même temps

$$\beta = 2,$$

et

$$n = q = c = 1.$$

Ce cas unique correspond au quotient

$$\frac{1.2.3}{4},$$

qui forme une exception à la seconde partie du théorème lorsqu'on étend celui-ci au cas de $n = 1$.

Donc, en résumé, le quotient

$$\frac{1.2.3\dots(a-1)}{a},$$

qui correspond au cas où $n = 1$, est fractionnaire lorsque a est premier, entier lorsque a n'est pas premier, excepté dans le cas unique où $a = 4$; et, à cette exception près, le théorème qui fait l'objet de cet article subsiste lorsque $n = 1$.