NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

De la réalité des racines de l'équation du troisième degré en S : $\Delta = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0$, où B, B', B'' représentent des quantités différentes de zéro

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 305-308
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__305_1>

DE LA RÉALITE DES RACINES DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ EN S :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

où B, B′, B″ représentent des quantités différentes de zéro.

On a, en multipliant par B, B', B'' les éléments des lignes horizontales,

$$\Delta BB'B'' = \begin{vmatrix} (A - S)B & BB'' & BB' \\ B'B'' & (A' - S)B' & BB' \\ B'B'' & BB'' & (A'' - S)B'' \end{vmatrix};$$

d'où

$$\Delta BB'B'' = \begin{vmatrix} (A-S)B - B'B'' & BB'' - (A'-S)B' & 0 \\ 0 & (A'-S)B' - BB'' & BB' - (A''-S)B'' \\ B'B'' & BB'' & (A''-S)B'' - BB' + BB' \end{vmatrix};$$

et, en divisant respectivement par B, B', B'' les éléments des colonnes de rangs 1, 2, 3 de ce dernier déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A-S) - \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} - (A'-S) & 0 \\ 0 & (A'-S) - \frac{BB''}{B'} & \frac{BB'}{B''} - (A''-S) \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (A''-S) - \frac{BB'}{B''} + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

En posant

$$A - \frac{B'B''}{B} = a, \quad A' - \frac{BB''}{B'} = a', \quad A'' - \frac{BB'}{B''} = a'',$$

il vient

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a - S & S - a' & 0 \\ 0 & a' - S & S - a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & a'' - S + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

Actuellement, supposons que les quantités a, a', a'' soient inégales et qu'on ait, par exemple, $a < a' < a''$.

Si l'on remplace successivement S par a, a', a'', les valeurs correspondantes de Δ, données par l'égalité (1), seront :

$$\frac{B'B''}{B}(a-a')(a-a''), \qquad -\frac{BB''}{B'}(a-a')(a'-a''), \qquad \frac{BB'}{B''}(a-a'')(a'-a'').$$

ou

$$\frac{BB'B''}{B}(a-a')(a-a''),\quad -\frac{BB'B''}{B'^2}(a-a')(a'-a''),\quad \frac{BB'B''}{B''^2}(a-a'')(a'-a''),$$

et, comme les produits $(a-a')(a-a'')$, $(a-a')(a'-a'')$, $(a-a'')(a'-a'')$ sont positifs, on voit que les substitutions de a et a' à S dans Δ donnent des résultats de signes contraires, et qu'il en est de même des substitutions de a' et a''; par conséquent, l'équation $\Delta = 0$ a une racine comprise entre a et a', et une autre racine comprise entre a' et a''.

En outre, pour $S=-\infty$, $\Delta=+\infty$, et pour $S=+\infty$, $\Delta=-\infty$; donc, suivant que le produit $BB'B''$ est positif ou négatif, la troisième racine de l'équation $\Delta = 0$ est plus grande que a'' ou plus petite que a.

Ainsi, dans l'hypothèse de l'inégalité des quantités a, a', a'', les trois racines de l'équation $\Delta = 0$ sont réelles et inégales.

Si deux des quantités a, a', a'' étaient égales entre elles, et qu'on eût, par exemple, $a = a'$, l'égalité (1) deviendrait

$$\Delta = (a-S)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-S & S-a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a''-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix};$$

l'une des racines de l'équation $\Delta = 0$ serait a, et les deux autres seraient données par la résolution de l'équation du second degré

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-S & S-a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a''-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant successivement l'inconnue S par a et a'', le premier membre de l'équation (2) prend les valeurs

$$-\left(\frac{BB''}{B'}+\frac{B'B''}{B}\right)(a-a''),\quad +\frac{BB'}{B''}(a-a''),$$

ou

$$-BB'B''\left(\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{B^2}\right)(a-a''),\quad +BB'B''\frac{1}{B''^2}(a-a''),$$

qui ont des signes contraires. Donc cette équation a une racine comprise entre a et a''. L'autre racine est plus grande que a'', ou moindre que a, suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif.

Donc, dans ce second cas, l'équation $\Delta = 0$ a encore ses trois racines réelles et inégales.

Enfin, lorsque $a = a' = a''$, l'égalité (1) prend la forme

$$\Delta = (a-S)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

L'équation proposée $\Delta = 0$ a deux racines égales à a, et la troisième, déterminée par l'équation du premier degré

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0,$$

a pour valeur $a+\frac{B'B''}{B}+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''}$.

Il en faut conclure que, dans tous les cas, l'équation proposée $\Delta = 0$ a ses trois racines réelles. G.