

E. DEWULF

Des intersections des faisceaux de courbes et des faisceaux de leurs polaires inclinées

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 297-305

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__297_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DES INTERSECTIONS DES FAISCEAUX DE COURBES ET DES FAISCEAUX DE LEURS POLAIRES INCLINÉES ;

PAR M. E. DEWULF.

I. Soient $F(x, y) = 0$ et $f(x, y) = 0$ les équations de deux courbes de degré n , $F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$ représente un faisceau de courbes d'ordre n , pivotant autour de n^2 points fixes.

Nous avons nommé (*) *première polaire inclinée* d'un point P , par rapport à une courbe C^n , le lieu des points où toutes les droites issues de P rencontrent la courbe sous un angle constant, et *coefficient d'inclinaison* la tangente k de cet angle.

Les premières polaires inclinées d'un point P , par rap-

(*) Voir 1^{re} série, t. XVIII, p. 232

port aux différentes courbes d'un faisceau $F + \lambda f = 0$, forment un faisceau $\pi + \lambda \varphi = 0$ homographique au premier et de même ordre. Le lieu des intersections des courbes correspondantes de ces deux faisceaux est représenté par l'équation $F\varphi - f\pi = 0$ de degré $2n$. Désignons cette courbe par ψ_k^{2n} , k étant le coefficient d'inclinaison.

II. Soient α, β les coordonnées rectangulaires du point P, le faisceau de ses premières polaires inclinées, par rapport à $F + \lambda f = 0$, a pour équation

$$(\beta - y) \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) + (\alpha - x) \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) + \lambda \left[(\beta - y) \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) + (\alpha - x) \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] = 0,$$

et l'équation de ψ_k^{2n} est

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \left\{ \frac{dF}{dy} [\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx} [\alpha - x + k(\beta - y)] \right\} \\ - F \left\{ \frac{df}{dy} [\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx} [\alpha - x + k(\beta - y)] \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

Cette équation peut aussi être mise sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta - y) \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ + (\alpha - x) \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] \end{array} \right\} = 0,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \left[\frac{dF}{dy} (\beta - y) + \frac{dF}{dx} (\alpha - x) \right] - F \left[\frac{df}{dy} (\beta - y) + \frac{df}{dx} (\alpha - x) \right] \\ + k \left\{ f \left[\frac{dF}{dx} (\beta - y) - \frac{dF}{dy} (\alpha - x) \right] - F \left[\frac{df}{dx} (\beta - y) - \frac{df}{dy} (\alpha - x) \right] \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

On conclut de l'équation (1) que, *quelles que soient*

les valeurs α, β et k , la courbe ψ_k^{2n} passe par les n^2 points fixes du faisceau $F + \lambda f = 0$; et de l'équation (2) que, quelle que soit la valeur de k , la courbe ψ_k^{2n} passe par le point P.

Cette équation (2) est aussi satisfaite, quelles que soient les valeurs de α, β , si l'on a

$$(a) \quad \begin{cases} f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) = 0. \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$(b) \quad \begin{cases} f \frac{dF}{dy} - F \frac{df}{dy} = -k \left(f \frac{dF}{dx} - F \frac{df}{dx} \right), \\ f \frac{dF}{dx} - F \frac{df}{dx} = +k \left(f \frac{dF}{dy} - F \frac{df}{dy} \right), \end{cases}$$

qui fait voir qu'elles ne peuvent être satisfaites simultanément pour une même valeur de k que si l'on a

$$(c) \quad f \frac{dF}{dy} - F \frac{df}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad f \frac{dF}{dx} - F \frac{df}{dx} = 0.$$

et alors elles le sont, quelle que soit la valeur de k .

Donc les courbes ψ_k^{2n} , qui correspondent à tous les points du plan de $F + \lambda f = 0$, et pour toutes les valeurs de k , passent par les $(2n - 1)^2$ points d'intersection des courbes (c).

Remarquons que ces $(2n - 1)^2$ points se trouvent sur la courbe $\frac{df}{dy} \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dx} \frac{df}{dy} = 0$ d'ordre $2(n - 1)$, qui passe par les points où les courbes $F = 0$ et $f = 0$ se coupent orthogonalement; nous trouverons plus loin la signification précise de ces points.

L'équation (1) est satisfaite aussi si l'on a simultanément

$$F=0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} [\beta - \gamma - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx} [\alpha - x + k(\beta - \gamma)] = 0,$$

ou

$$f=0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} [\beta - \gamma - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx} [\alpha - x + k(\beta - \gamma)] = 0,$$

ou encore

$$\frac{dF}{dy} [\beta - \gamma - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx} [\alpha - x + k(\beta - \gamma)] = 0$$

et

$$\frac{df}{dy} [\beta - \gamma - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx} [\alpha - x + k(\beta - \gamma)] = 0.$$

c'est-à-dire que la courbe ψ_k^{2n} , qui correspond à un point P, pour une valeur déterminée de k , passe : 1° par les points d'intersection de $F=0$ et de la première polaire inclinée de P par rapport à F; 2° par les points d'intersection de $f=0$ et de la première polaire inclinée de P par rapport à f ; 3° par les points d'intersection des premières polaires inclinées de P par rapport à $F=0$ et $f=0$.

L'équation (3) montre que : les courbes ψ_k^{2n} , qui correspondent à un point donné P, forment, pour les valeurs variables de k , un faisceau d'ordre $2n$, dont les $4n^2$ pivots peuvent être déterminés par les courbes ψ_0^{2n} et ψ_∞^{2n} qui correspondent à $k=0$ et $k=\infty$.

III. Supposons maintenant que le point P parcoure une droite L dont l'équation est $y = Ax + B$. Nous aurons, entre α et β , la relation $\beta = A\alpha + B$; portons

cette valeur de β dans l'équation (2), nous aurons

$$(d) \left\{ \begin{aligned} & \alpha \left\{ A \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right\} \\ & + (B - \gamma) \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ & - x \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α , si l'on pose simultanément

$$(e) \left\{ \begin{aligned} & A \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ & + f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(f) \left\{ \begin{aligned} & (B - \gamma) \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ & - x \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

Ces courbes se coupent en $2n(2n - 1)$ points pour une même valeur de k .

Donc, si un point P parcourt une droite L , les courbes ψ_k^{2n} correspondantes, pour une valeur constante de k , forment un faisceau d'ordre $2n$ qui pivote autour de $2n(2n - 1)$ points fixes.

Si la droite L passe à l'infini, le nombre des pivots se réduit à $(2n - 1)^2$, et ils sont déterminés par les équations

$$(g) \quad f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) = 0,$$

$$(h) \quad f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) = 0.$$

Remarquons que les équations (g) et (h) sont précisément les mêmes que les équations (a) ; elles se réduisent donc aux équations (c) , et les $(2n-1)^2$ points d'intersection des courbes (c) ne sont autres que les points qui correspondent à la droite de l'infini.

Remarquons encore que les équations (e) et (f) sont satisfaites, quelles que soient les valeurs de A et B , quand les équations (g) et (h) le sont ; donc, les $(2n-1)^2$ points qui correspondent à la droite de l'infini sont au nombre des $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L .

Mettons les équations (e) et (f) sous la forme

$$\begin{aligned} & A \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ &= -f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) + F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right), \\ & (B-y) \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ &= -x \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right], \end{aligned}$$

et divisons-les membre à membre, nous obtiendrons

$$y = Ax + B,$$

c'est l'équation de la droite L ; en la combinant avec l'équation (e) , elle détermine $2n-1$ points en ligne droite qui appartiennent aux $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L .

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quand un point P parcourt une droite L , les courbes ψ_k^{2n} qui correspondent à chaque position de P forment un faisceau d'ordre $2n$ qui pivote autour de $2n(2n-1)$ points fixes, savoir : les $(2n-1)^2$ points qui correspon-

dent à la droite de l'infini, et $2n - 1$ points situés sur la droite L qui passent à l'infini avec cette droite.

Des déductions du paragraphe II nous pouvons aussi conclure que

Toutes les courbes ψ_k^n qui correspondent à tous les points du plan du faisceau $F + \lambda f = 0$, et pour toutes les valeurs de k , se coupent en $n^2 + (2n - 1)^2$ points fixes qui sont : les $(2n - 1)^2$ points qui correspondent à la droite de l'infini, et les n^2 pivots du faisceau $F + \lambda f = 0$.

Voyons maintenant ce que deviennent les $2n(2n - 1)$ points fixes qui correspondent à L pour une valeur donnée de k , quand k varie de $+\infty$ à $-\infty$. Pour cela, éliminons k entre les équations (e) et (f); nous obtenons

$$(Ax + B - y) \left[\left(f \frac{dF}{dy} - F \frac{dx}{df} \right)^2 + \left(f \frac{dF}{dx} - F \frac{df}{dy} \right)^2 \right] = 0,$$

qui se décompose en

$$y = Ax + B \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} \frac{df}{dx} - \frac{dF}{dx} \frac{df}{dy} = 0.$$

Donc, quand le coefficient k varie de $+\infty$ à $-\infty$, $2n - 1$ des points fixes qui correspondent à L, décrivent la droite L, et les $(2n - 1)^2$ autres points qui correspondent à L décrivent la courbe $\frac{dF}{dy} \frac{df}{dx} - \frac{dF}{dx} \frac{df}{dy} = 0$.

Supposons que le point P parcoure une courbe

$$M(x, y) = 0,$$

et cherchons l'enveloppe des courbes ψ_k^n correspondantes à chacune des positions de P, k restant constant.

Nous avons

$$(1) \quad M(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta - \gamma) \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ + (\alpha - x) \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] = 0, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \frac{dM}{d\alpha} + \frac{dM}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta}{d\alpha} \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ + f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre (3) et (4), et combinant la résultante avec (2), nous trouvons

$$(5) \quad (\beta - \gamma) \frac{dM}{d\beta} + (\alpha - x) \frac{dM}{d\alpha} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (5).

Cherchons aussi le lieu des $2n(2n - 1)$ points qui correspondent à une tangente à $M(x, y) = 0$, quand cette tangente roule autour de la courbe.

x', y' étant les coordonnées d'un point de M, l'équation de la tangente en ce point est

$$(y - y') \frac{dM}{dy'} + (x - x') \frac{dM}{dx'} = 0.$$

Dans les équations (e) et (f) qui déterminent les $2n(2n - 1)$ points qui correspondent à une droite, rem-

plaçons A par $-\frac{\frac{dM}{dx'}}{\frac{dM}{dy'}}$ et B par $y' + x' \frac{\frac{dM}{dx'}}{\frac{dM}{dy'}}$ nous trouvons :

$$(6) \quad (y - y') \frac{dM}{dy'} + (x - x') \frac{dM}{dx'} = 0,$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (y - y') \left[f \left(\frac{dF}{dy} + k \frac{dF}{dx} \right) - F \left(\frac{df}{dy} + k \frac{df}{dx} \right) \right] \\ & + (x - x') \left[f \left(\frac{dF}{dx} - k \frac{dF}{dy} \right) - F \left(\frac{df}{dx} - k \frac{df}{dy} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver le lieu cherché, il faut éliminer y' et x' entre les équations (6), (7) et $M(x', y') = 0$.

Or ces équations sont exactement les mêmes que les équations (1), (2), (5).

Donc l'enveloppe des courbes ψ_k^{2n} qui correspondent aux points d'une courbe M est la même courbe que le lieu décrit par les $2n(2n - 1)$ points fixes des faisceaux qui correspondent aux tangentes à M.