

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 11
(1872), p. 280-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__280_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 32

(voir 1^{re} série, t. I, p. 291).

PAR M. J. MISTER,

Repetiteur d'Analyse à l'Ecole du Genie civil de Belgique.

THÉORÈME. — *a et b désignant les demi-axes principaux d'une ellipse, le périmètre de l'ellipse est toujours compris entre $\pi(a + b)$ et $\pi\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.*

(J. BERNOULLI.)

On peut prendre pour coordonnées d'un point de l'ellipse

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi,$$

et par suite

$$dx = a \cos \varphi d\varphi, \quad dy = -b \sin \varphi d\varphi, \quad ds = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

d'où, pour un quart d'ellipse,

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

ou encore

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Si dans ces intégrales on donne à φ une valeur constante $\varphi = 0$, en appelant s_1 la nouvelle valeur de s , on aura

$$s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} b d\varphi,$$

d'où l'on tire

$$s - s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} - a - b) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une fonction de φ qui est toujours positive. En effet, sa dérivée est égale à

$$\frac{(a^2 - b^2) \sin 2\varphi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \right),$$

et comme

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} < \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

cette dérivée sera positive, et comme la fonction s'annule

pour $\varphi = 0$, il en résulte que cette fonction sera toujours positive. Par conséquent, on pourra écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}) d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a+b) d\varphi,$$

ou, E désignant le périmètre de l'ellipse,

$$\frac{E}{4} > (a+b) \frac{\pi}{4}.$$

Donc, 1^o

$$E > \pi (a+b).$$

En second lieu, si dans la valeur de s on donne à l'angle φ la valeur constante $\varphi = \frac{\pi}{4}$, en appelant s_2 la nouvelle valeur de s , on aura

$$s_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2} d\varphi,$$

et par suite

$$s_2 - s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une nouvelle fonction de φ qui est encore positive. En effet, sa dérivée étant égale à la précédente changée de signe sera toujours négative, mais ne pourra s'annuler, puisque φ est plus petit que $\frac{\pi}{4}$.

Comme la fonction est positive pour $\varphi = 0$, il en résulte qu'elle sera constamment positive, et par suite on pourra encore écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2} d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}) d\varphi$$

ou

$$\frac{E}{4} < \sqrt{2a^2 + 2b^2} \frac{\pi}{4}.$$

Donc 2°

$$E < \pi \sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

Note. — Voir, 1^{re} série, t. III, une solution de M. A. Peyronny.

Question 166

(voir 1^{re} série, t. VI, p. 394);

PAR M. H. BROCARD.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \omega.$$

(W. ROBERTS.)

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

on en tire

$$\text{tang } V = \frac{r}{r'} = -\cot 2\theta;$$

d'où

$$V - 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Mais, ρ et ω étant les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$\rho = r \cos(\omega - \theta)$$

et

$$V = \frac{\pi}{2} + \omega - \theta;$$

on déduit de là

$$\omega = 3\theta,$$

(284)

et, pour l'équation du lieu,

$$\rho^2 = a^2 \cos^3 \frac{2}{3} \omega,$$

ou

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{2}{3}} \omega.$$

On trouverait de même que le lieu des projections du centre de cette nouvelle courbe sur ses tangentes, ou la deuxième podaire de la lemniscate, a pour équation

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{2}{3}} \omega;$$

et d'une manière générale que les podaires successives des courbes

$$\rho^m = a^m \cos m \omega$$

appartiennent à la même famille (*).

Question 977

(voir 2^e série, t. VIII, p. 563),

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole. (Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence.)

Soient

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole, x_1, y_1 les coordonnées du

(*) Voir, à ce sujet, l'exposé historique inséré au t. III de la 2^e série, p. 80. Voir aussi, même série, t. IX, p. 30, et t. XI, p. 162, deux Notes de M. Allégret relatives aux propriétés de ces courbes.

point donné, l sa distance à l'origine et α, β les coordonnées inconnues du centre du cercle.

L'équation de ce cercle sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2,$$

ou

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = l^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1.$$

Son intersection avec la parabole sera déterminée par les équations (1) et (2). Pour que ce cercle soit doublement tangent à la parabole, il faut que l'équation du 4^e degré en y , résultant de l'élimination de x entre ces deux équations, ait deux couples de racines égales, et, par conséquent, que son premier membre soit un carré. Cette équation est

$$y^4 + 4p^2y^2 - 4p\alpha y^2 - 8p^2\beta y - 4p^2(l^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1) = 0.$$

Le terme du 3^e degré manquant, pour que le premier membre soit un carré, il faut d'abord que $\beta = 0$, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*.

L'équation se réduit à

$$y^4 + 4p(p - \alpha)y^2 - 4p^2(l^2 - 2\alpha x_1) = 0.$$

Il faut ensuite que l'on ait

$$4p^2(p - \alpha)^2 = 4p^2(2\alpha x_1 - l^2),$$

ou

$$(p - \alpha)^2 = 2\alpha x_1 - l^2,$$

$$\alpha^2 - 2(x_1 + p)\alpha + l^2 + p^2 = 0,$$

$$\alpha = x_1 + p \pm \sqrt{2px_1 - y_1^2}.$$

Le point étant à l'intérieur de la parabole $2px_1 - y_1^2 > 0$, le problème admettra toujours deux solutions.

La construction des deux valeurs de α revient à ce problème de Géométrie élémentaire : construire deux

lignes connaissant leur somme $2(x_1 + p)$ et leur produit $l^2 + p^2$.

Joignant le point α au point donné, on aura le rayon.

On parvient plus simplement au même résultat par d'autres considérations.

Le centre du cercle devant se trouver sur l'axe, si l'on nomme α sa distance au sommet, le carré du rayon ou de la normale sera égal à $p(2\alpha - p)$; mais il est aussi égal à $(x_1 - \alpha)^2 + y_1^2 = l^2 - 2\alpha x_1 + \alpha^2$; d'où l'équation

$$\alpha^2 - 2(x_1 + p)\alpha + l^2 + p^2 = 0.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. O. Callandreaux; J. Augier, élève du lycée de Lyon; Aubry, élève à Saint-Étienne; A. Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; A. Petot, élève du lycée de Nancy; A. Luc, E. Laclais et H. Lez.

Question 1048

(voir 2^e série, t. X, p. 557);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on propose de rendre minimum

$$\frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A \cdot \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B}.$$

(J.-CH. DUPAIN.)

Par la relation des sinus, je transforme l'expression proposée en celle-ci :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S},$$

dans laquelle a, b, c et S désignent les côtés et la surface d'un triangle rectiligne.

La question, ainsi transformée, restera tout aussi géné-

rale que la proposée, si j'établis entre les trois côtés a , b , c la relation

$$a + b + c = 2p = \text{const.};$$

car avec le périmètre et deux angles pris arbitrairement, pourvu que leur somme soit plus petite que deux droits, on peut toujours construire un triangle.

Mais alors le numérateur devient *minimum* et le dénominateur devient *maximum* pour $a = b = c$; donc l'expression transformée devient aussi minimum pour cette hypothèse.

Ainsi la condition cherchée est $A = B = C$, ce qui conduit à $2\sqrt{3}$ pour le minimum demandé.

Remarque. — Si l'on pose $\frac{b}{a} = \alpha$, $\frac{c}{a} = \beta$, et si l'on remplace S par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]},$$

il viendra, après avoir élevé au carré

$$\frac{4(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2}{[(1 + \alpha)^2 - \beta^2][\beta^2 - (1 - \alpha)^2]}.$$

En égalant à zéro séparément les dérivées par rapport à α et β , on arrive aux équations

$$\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2 - 1 = 0,$$

$$\beta^2(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^2 - 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \beta = 1; \quad \text{par suite} \quad a = b = c,$$

comme ci-dessus. On vérifie aisément que c'est un minimum.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier; H. Brocard; S. Dautheville; Leon Lecornu, élève du lycée de Caen; C. Guesnet, élève du lycée du Havre.