NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HERMITE

Sur l'intégration des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 145-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__145_0>

SUR L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. HERMITE.

Le procédé élémentaire d'intégration des fractions rationnelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être présenté sous une forme telle, que la résolution de l'équation $F(x)=0$ ne soit plus nécessaire pour le calcul de la partie algébrique de l'intégrale, mais seulement pour en obtenir la partie transcendante. Dans ce but, on mettra d'abord le dénominateur, au moyen de la théorie des racines égales, sous la forme suivante :

$$F(x) = A^{\alpha+1}B^{\beta+1}\ldots L^{\lambda+1},$$

A, B,..., L étant des polynômes tels, que l'équation $AB\ldots L=0$ n'ait que des racines simples, et l'on fera ensuite

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{P}{A^{\alpha+1}} + \frac{Q}{B^{\beta+1}} + \ldots + \frac{S}{L^{\lambda+1}},$$

P, Q,..., S étant des fonctions entières.

Cela posé, l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{A^{\alpha+1}}$ se traitera comme il suit : nous effectuerons sur A et sa dérivée A′ les opérations du plus grand commun diviseur, de manière à obtenir deux polynômes G et H, satisfaisant à la condition

$$AG - A'H = 1.$$

Nous formerons ensuite deux séries de fonctions entières :

$$V_0,\ V_1,\ldots,\ V_{\alpha-1},$$
$$P_1,\ P_2,\ldots,\ P_\alpha,$$

par ces relations, où les polynômes Q, Q_1, Q_2,... sont entièrement arbitraires, savoir :

$$\begin{aligned}
\alpha V_0 &= HP - AQ,\\
(\alpha - 1) V_1 &= HP_1 - AQ_1,\\
(\alpha - 2) V_2 &= HP_2 - AQ_2,\\
&\vdots\\
V_{\alpha-1} &= HP_{\alpha-1} - AQ_{\alpha-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= GP - A'Q - V'_0,\\
P_2 &= GP_1 - A'Q_1 - V'_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
P_\alpha &= GP_{\alpha-1} - A'Q_{\alpha-1} - V'_{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant je prouverai qu'en faisant

$$\begin{aligned}
V &= V_0 + AV_1 + A^2V_2 + \dots + A^{\alpha-1}V_{\alpha-1},\\
U &= P_\alpha,
\end{aligned}$$

on a l'égalité

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} = \frac{U}{A} + \left(\frac{V}{A^\alpha}\right)';$$

d'où

$$\int \frac{P\,dx}{A^{\alpha+1}} = \int \frac{U\,dx}{A} + \frac{V}{A^\alpha},$$

de sorte que $\frac{V}{A^\alpha}$ est la partie algébrique de l'intégrale proposée, et $\int \frac{U\,dx}{A}$ la partie transcendante.

A cet effet, j'élimine G et H entre les trois égalités

$$\begin{aligned}
AG - A'H &= 1,\\
(\alpha - i) V_i &= HP_i - AQ_i,\\
P_{i+1} &= GP_i - A'Q_i - V'_i,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$AP_{i+1} = P_i + (\alpha - i)A'V_i - AV'_i$$

Or on peut écrire cette relation de la manière suivante :

$$\frac{P_i}{A^{\alpha-i+1}} - \frac{P_{i+1}}{A^{\alpha-i}} = \left(\frac{V_i}{A^{\alpha-i}}\right)'.$$

En supposant ensuite $i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ et ajoutant membre à membre, nous en conclurons

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} - \frac{P_\alpha}{A} = \left(\frac{V_0}{A^\alpha} + \frac{V_1}{A^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{V_{\alpha-1}}{A}\right)',$$

ce qui fait bien voir qu'on satisfait à la condition proposée

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} = \frac{U}{A} + \left(\frac{V}{A^\alpha}\right)'$$

par les valeurs

$$V = V_0 + AV_1 + A^2V_2 + \ldots + A^{\alpha-1}V_{\alpha-1},$$
$$U = P_\alpha,$$

comme il s'agissait de le démontrer.

J'ai dit que les polynômes $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ étaient arbitraires; on pourra donc en disposer de manière que les degrés de $V_0, V_1, V_2, \ldots V_{\alpha-1}$, soient moindres que le degré de A; on pourra aussi les supposer tous nuls, ce qui donnera, par exemple,

$$\alpha V_0 = HP,$$
$$\alpha(\alpha - 1)V_1 = H[(\alpha G - H')P - HP'],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces deux suppositions se concilient dans le cas de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\alpha+1}}$, que je choisis comme application de la méthode. Nous aurons alors

$$A = x^2 + 1, \quad A' = 2x,$$

$$G = 1, \qquad H = \frac{x}{2},$$

puis successivement

$$\alpha V_0 = \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 1) V_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 2) V_2 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)} \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 3) V_3 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)(2\alpha - 5)}{2\alpha(2\alpha - 2)(2\alpha - 4)} \frac{x}{2},$$

$$\vdots$$

$$V_{\alpha-1} = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)\ldots 5.3}{2\alpha(2\alpha - 2)\ldots 6.4} \frac{x}{2},$$

$$P = 1,$$

$$P_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha},$$

$$P_2 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)},$$

$$\vdots$$

$$P_\alpha = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)\ldots 3.1}{2\alpha(2\alpha - 2)\ldots 4.2}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation bien connue, à laquelle on parvient ordinairement au moyen de l'intégration par parties, savoir :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\alpha+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2\alpha - 1)}{2.4.6\ldots 2\alpha} \operatorname{arctang} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)^\alpha}$$
$$\times \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \frac{x^2 + 1}{\alpha - 1} + \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)} \frac{(x^2 + 1)^2}{\alpha - 2} + \ldots \right].$$