

H. LEMONNIER

Problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 550-554

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__550_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES ;

PAR M. H. LEMONNIER.

1. *Étant donnée une surface du second degré, on mène par un point (x, y, z) un plan variable, on en prend le pôle $Q(x_1, y_1, z_1)$, et l'on considère le cône circonscrit à la surface dont Q est le sommet : lieu des traces des axes du cône sur le plan.*

Si l'équation de la surface est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, en coordonnées rectangulaires, les axes étant les normales aux surfaces homofocales qui passent par le point Q, les équations du problème sont :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2+u} + \frac{y_2^2}{b^2+u} + \frac{z_2^2}{c^2+u} = 1,$$

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 1, \quad \frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}} = \frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}} = \frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}}.$$

De là

$$\frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}} = \frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}} = \frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}} = \frac{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)} + \frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)} + \frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}$$

$$= -\frac{1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)} + \frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)} + \frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}.$$

Or

$$1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{z_2^2}{c^2} - \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2+u} - \frac{y_2^2}{b^2+u} - \frac{z_2^2}{c^2+u} \right)$$

$$= -u \left[\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)} + \frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)} + \frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)} \right].$$

D'où

$$x-x_2 = -u \frac{x_2}{a^2+u}, \quad y-y_2 = -u \frac{y_2}{b^2+u}, \quad z-z_2 = -u \frac{z_2}{c^2+u},$$

ou

$$\frac{x}{a^2} = \frac{x_2}{a^2+u}, \quad \frac{y}{b^2} = \frac{y_2}{b^2+u}, \quad \frac{z}{c^2} = \frac{z_2}{c^2+u},$$

comme intersection commune des plans polaires de μ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z}{c^2}} &= \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \\ &= \frac{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1}{\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4}}. \end{aligned}$$

L'équation du lieu est donc

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4} \right) \\ &= \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right). \end{aligned}$$

Remarque, — Les équations

$$\frac{x - x_1}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z}{c^2}}$$

indiquent que l'axe QM est normal au plan polaire du point M par rapport à la surface. Il l'est en effet au plan polaire du point M par rapport au cône; et ce plan polaire est le même que par rapport à la surface, puisque M est sur le plan de contact. Cette considération peut donner immédiatement les équations; d'où le reste.

2. Du point (x, y, z) on mène à la surface une sécante quelconque $P\mu\mu'$. En ses points de rencontre μ, μ' avec la surface, on mène les plans tangents qui se coupent suivant la droite D. On mène par D les plans bissecteurs des angles dièdres des plans tangents : lieu de leurs traces MM' sur la sécante $P\mu\mu'$.

La droite D est la droite conjuguée de la sécante;

d'où

$$D \quad \begin{cases} \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0, \\ \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Or, les plans bissecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre et forment un faisceau harmonique avec les deux plans tangents, de sorte que μ , μ' , M et M' sont disposés harmoniquement. Le plan polaire de M , par rapport à la surface, passe donc en M' et aussi suivant D ; c'est donc le plan bissecteur qui passe en M' . Donc le plan bissecteur passant en M est suivant D un plan perpendiculaire au plan polaire de M .

Or le plan donné par

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 + \lambda \left(\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

est perpendiculaire au plan donné par

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0,$$

si l'on a

$$\frac{x_1X}{a^4} + \frac{y_1Y}{b^4} + \frac{z_1Z}{c^4} + \lambda \left(\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4} \right) = 0;$$

il passe en M , si l'on a

$$\frac{Xx_1}{a^2} + \frac{Yy_1}{b^2} + \frac{Zz_1}{c^2} - 1 + \lambda \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 \right) = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Xx_1}{a^4} + \frac{Yy_1}{b^4} + \frac{Zz_1}{c^4} \right) \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4} \right) \left(\frac{Xx_1}{a^2} + \frac{Yy_1}{b^2} + \frac{Zz_1}{c^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Le lieu est donc le même que le précédent.

Ce fait s'explique aisément.

Soit M la trace d'un axe du cône sur le plan sécant mené en P . Le plan polaire de ce point, par rapport au cône et à la surface, est perpendiculaire sur QM ; de sorte que, si M' en est le point de rencontre avec PM , la droite QM' est perpendiculaire sur QM ; les points M et M' forment une division harmonique avec les points μ et μ' où la droite MM' coupe la surface. Puisque QM et QM' sont à angle droit, ce sont les bissectrices des angles que font $Q\mu$ et $Q\mu'$. Or les plans tangents au cône le long de $Q\mu$ et $Q\mu'$ se coupent suivant une droite D , qui est également inclinée sur ces droites $Q\mu$, $Q\mu'$ en sens contraires; car si l'on considère un plan perpendiculaire à QM , et les points où il coupe $Q\mu$, $Q\mu'$, on voit que les tangentes à la section en ces points étant parallèles, l'intersection dont il s'agit leur est parallèle, par suite, est comme elles également inclinée en sens contraires sur $Q\mu$ et $Q\mu'$. Il s'ensuit que les plans menés par cette intersection et les bissectrices QM , QM' sont les plans bissecteurs des angles dièdres que font les plans tangents en μ et μ' .

C. Q. F. D.
