

J. BOURGET

## Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1870), p. 537-540

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1870\\_2\\_9\\_\\_537\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__537_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN;**

**PAR M. J. BOURGET.**

---

1. On peut donner une forme extrêmement générale au reste de la série de Maclaurin, en y introduisant une

fonction arbitraire. On retrouve ainsi les diverses formes particulières, et l'on peut en tirer une infinité d'autres. Voici comment j'ai été conduit à ce résultat, qui peut-être n'est pas nouveau, car il est un corollaire facile de théorèmes bien connus.

2. On démontre facilement (*voir le Cours d'Analyse* de M. Duhamel) que, si  $F(x)$  et  $f(x)$  sont des fonctions continues, finies et uniformes entre  $a$  et  $b$ , on a

$$\frac{F(a) - F(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{F'[a + \theta(b - a)]}{f'[a + \theta(b - a)]},$$

$\theta$  étant un nombre positif compris entre 0 et 1; peu importe d'ailleurs que  $a$  soit plus grand ou plus petit que  $b$ .

Si nous supposons, en outre, que

$$F(b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

la relation précédente deviendra

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'[a + \theta(b - a)]}{f'[a + \theta(b - a)]}.$$

C'est de là que nous allons tirer l'identité de Maclaurin.

3. Supposons que  $a$  soit une variable et  $b$  une constante; posons

$$\begin{aligned} F(a) = & \varphi(b) - \varphi(a) - \frac{b-a}{1} \varphi'(a) - \frac{(b-a)^2}{1.2} \varphi''(a) - \dots \\ & - \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \varphi^{(n-1)}(a) \end{aligned}$$

et

$$f(a) = \varpi(b - a).$$

Nous admettrons que toutes les fonctions dérivées de  $\varphi$

sont finies, continues et uniformes dans l'intervalle de  $a$  à  $b$ , et que  $\varpi(0) = 0$ . Nous aurons

$$F(b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

et

$$F'(a) = -\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} \varphi^n(a), \quad f'(a) = -\varpi(b-a);$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) - \frac{b-a}{1} \varphi'(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} \varphi^{n-1}(a) \\ \hline \varpi(b-a) \\ = \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1} \varphi^n[a + \theta(b-a)]}{1.2.3\dots(n-1) \varpi'[(1-\theta)(b-a)]}. \end{aligned}$$

De là nous tirons l'identité

$$\begin{aligned} \varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{1} \varphi'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2} \varphi''(a) + \dots \\ + \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} \varphi^{n-1}(a) \\ + \frac{\varpi(b-a)}{\varpi'[(1-\theta)(b-a)]} \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \varphi^n[a + \theta(b-a)]. \end{aligned}$$

4. Supposons maintenant dans cette identité  $a = 0$ , et changeons  $b$  en  $x$ ; nous aurons l'identité de Maclaurin

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) + \dots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} \varphi^{n-1}(0) + \frac{\varpi(x)}{\varpi'[(1-\theta)x]} \frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \varphi^n(\theta x), \end{aligned}$$

et  $\varpi$  est une fonction arbitraire assujettie à la seule condition de s'annuler pour  $x = 0$ .

5. Si maintenant nous considérons, dans  $\varphi(x+h)$ ,

$h$  comme la variable, la série de Maclaurin nous donnera celle de Taylor :

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\varphi^{n-1}(x) \\ &+ \frac{\varpi(h)}{\varpi'[(1-\theta)h]} \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\varphi^n(x+\theta h),\end{aligned}$$

et  $\varpi$  est une fonction arbitraire assujettie seulement à la condition de s'annuler pour  $h=0$ .

6. Dans l'identité de Maclaurin, faisons

$$\varpi(x) = x^p.$$

$p$  étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$\varpi'(x) = p x^{p-1};$$

par conséquent

$$\varpi'[(1-\theta)x] = p(1-\theta)^{p-1} x^{p-1}.$$

Nous aurons donc pour le reste

$$R = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\dots(n-1)p}\varphi^n(\theta x).$$

Si l'on fait dans cette formule :

1°  $p = n$ , on obtient la forme la plus généralement employée

$$R_1 = \frac{x^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(\theta x);$$

2°  $p = 1$ , on obtient la seconde forme

$$R_2 = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\varphi^n(\theta x).$$