

GÉRONO

**Note sur la résolution en nombres entiers
et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 469-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9_469_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS
DE L'ÉQUATION $x^n = y^n + 1$.**

I. Lorsque le nombre représenté par x est premier, l'équation proposée n'a pas d'autre solution entière et positive que la solution

$$x = 3, \quad m = 2, \quad y = 2, \quad n = 3 \text{ (*).}$$

C'est ce que nous allons démontrer.

(*) En n'admettant toutefois, pour les inconnues, que des valeurs entières supérieures à l'unité.

L'exposant n de y est nécessairement impair; autrement l'équation proposée se ramènerait à la forme $x^m = z^2 + 1$, et l'on sait que cette dernière équation n'admet aucune solution entière. (Voir la démonstration de M. Le Besgue, *Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. IX, p. 178.)

De plus, il est évidemment permis de considérer l'exposant n comme un nombre premier; car, si n admet un diviseur premier α autre que n , en posant $y^{\frac{n}{\alpha}} = Y$ l'équation proposée se réduira à celle-ci : $x^m = Y^{\alpha} + 1$, où l'exposant de Y est premier.

Cela posé, l'équation $x^m = y^n + 1$ peut s'écrire

$$x^m = (y + 1)(y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \dots - y + 1),$$

et, comme la division de $y^{n-1} - y^{n-2} + y^{n-3} - \dots - y + 1$ par $y + 1$ donne pour reste le nombre n , il vient, en nommant N le quotient de cette division,

$$(1) \quad x^m = (y + 1)[N(y + 1) + n].$$

Chacun des deux facteurs $(y + 1)$, $N(y + 1) + n$ de x^m étant divisible par le nombre premier x , ce nombre est aussi diviseur de n ; or n est premier, donc

$$(2) \quad x = n.$$

Plus généralement, tout facteur de x^m est une puissance entière de x ; pour le facteur $y + 1$, l'exposant de cette puissance est l'unité. En effet, soit $y + 1 = x^{\alpha}$, il en résulte

$$x^m = x^{\alpha}(Nx^{\alpha} + n) = x^{\alpha}(Nx^{\alpha} + x) = x^{\alpha+1}(Nx^{\alpha-1} + 1),$$

et, si α surpassait l'unité, le facteur $Nx^{\alpha-1} + 1$ de x^m ne serait pas divisible par x ; donc $\alpha = 1$, et

$$(3) \quad y + 1 = x = n.$$

En remplaçant x par $y + 1$, l'équation proposée $x^m = y^n + 1$ devient

$$(4) \quad (y + 1)^m = y^n + 1,$$

et l'on voit que l'exposant m doit être moindre que n . Mais $n = x = y + 1$; on a par conséquent l'inégalité

$$m < y + 1.$$

D'autre part, l'équation (4) donne

$$y^m + my^{m-1} + \dots + my + 1 = y^n + 1,$$

d'où

$$y^{m-1} + my^{m-2} + \dots + m = y^{n-1},$$

égalité qui montre que m est multiple de y ; donc

$$(5) \quad m = y.$$

Si maintenant on substitue y et $y + 1$ à m et n , dans l'équation (4), il en résultera d'abord

$$(y + 1)^y = y^{y+1} + 1,$$

puis, divisant par y^y ,

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = y + \frac{1}{y^y}.$$

Or, $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ ayant pour limite le nombre e , on a nécessairement

$$y + \frac{1}{y^y} < 3;$$

ainsi le nombre entier y est compris entre 1 et 3, par conséquent $y = 2$. Il s'ensuit $x = 3$, $m = 2$, $n = 3$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(La suite prochainement.)