

CHARLES BRISSE

Démonstration d'un théorème de Gauss relatif aux séries

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 36-37

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__36_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GAUSS RELATIF AUX SÉRIES;

PAR M. CHARLES BRISSE,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Lemme I. — Le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité, mettons-le sous la forme $\frac{1}{1 + \alpha}$, où α a pour limite zéro, la série sera convergente si $\lim. n\alpha > 1$, et divergente si $\lim. n\alpha < 1$.

Lemme II. — Si $\lim. n\alpha = 1$, mettons α sous la forme $\frac{1}{n} + \beta$, où $n\beta$ a pour limite zéro; la série sera convergente si $\lim. n\beta(l.n) > 1$, et divergente si $\lim. n\beta(l.n) < 1$.

C'est en nous appuyant sur ces deux lemmes, généra-

lement démontrés dans les cours, que nous allons établir le théorème de Gauss dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité et étant de la forme*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \dots},$$

c'est-à-dire s'exprimant par une fraction rationnelle de n , il faut et il suffit que

$$A - a > 1$$

pour que la série soit convergente.

En appliquant le lemme I, on trouve

$$\alpha = \frac{(A - a)n^{\lambda-1} + (B - b)n^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + \dots},$$

d'où

$$n\alpha = \frac{(A - a)n^\lambda + \dots}{n^\lambda + \dots},$$

d'où

$$\lim. n\alpha = A - a.$$

Donc, si $A - a > 1$ la série est convergente, et si $A - a < 1$ la série est divergente.

Supposons donc $A - a = 1$, et appliquons le lemme II, on a

$$\frac{1}{n} + \beta = \frac{n^{\lambda-1} + (B - b)n^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + \dots},$$

d'où

$$n\beta = \frac{(B - b)n^{\lambda-1} + \dots}{n^\lambda + \dots},$$

d'où

$$n\beta(l.n) = \frac{l.n}{n} \cdot \frac{(B - b)n^{\lambda-1} + \dots}{n^{\lambda-1} + \dots},$$

d'où

$$\lim. n\beta(l.n) = 0.$$

Donc la série est divergente.