NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 193-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__193_0>

LOIS DES CONIQUES SUROSCULATRICES DANS LES SURFACES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

Pour faciliter l'exposition de ce qui suit, je prie le lecteur de me permettre quelques dénominations inusitées.

Lorsqu'à partir d'un point déterminé d'une courbe les trois éléments consécutifs du polygone infinitésimal qui représente idéalement cette courbe seront sur un même cercle, celui-ci, contenant alors quatre points consécutifs de la courbe, formera une exception parmi les cercles osculateurs qui généralement n'en contiennent que trois; je l'appellerai un *cercle surosculateur*.

De même, lorsque la parabole osculatrice, qui est toujours déterminée par trois éléments infinitésimaux, c'est-à-dire par quatre points infiniment voisins, contiendra, par exception, un quatrième élément, un cinquième point, ce sera une *parabole surosculatrice*.

Et, à son tour, une conique, ellipse ou hyperbole, sera dite *surosculatrice* lorsqu'au delà des cinq points infiniment voisins qui suffisent à la détermination de la conique osculatrice ordinaire, elle contiendra un sixième point.

Ceci entendu, c'est une question de quelque intérêt dans la théorie des surfaces que celle de savoir si, en chaque point d'une surface quelconque, il y a quelque loi précise pour le nombre et la situation des courbes surosculatrices, cercle, parabole, ellipse et hyperbole.

Depuis longtemps, on sait qu'en chaque point d'une surface il existe deux droites contenant trois points consécutifs de la surface, et qu'ainsi on pourrait appeler des *droites surosculatrices*. Ce sont les deux asymptotes, réelles ou imaginaires, de l'indicatrice. Mais il ne faudrait pas demander combien il y a en chaque point de cercles surosculateurs, de paraboles, d'ellipses ou d'hyperboles surosculatrices; car il y en a une infinité, et cette question ne peut être posée qu'eu égard à un ensemble de sections de la surface qui soit lui-même bien défini (*). Je vais faire voir, par exemple, en négligeant d'abord la considération des cercles et des paraboles, que, dans l'ensemble des sections planes contenant une même droite menée par le point donné, droite normale ou oblique, mais non tangente à la surface, il y a toujours NEUF de ces sections qui admettent des coniques surosculatrices (ellipses ou hyperboles), et que, dans l'ensemble des sections menées par une même tangente, il y en a toujours TROIS qui jouissent de cette propriété.

II.

Soient OX et OY deux droites rectangulaires menées dans le plan qui touche la surface au point O. Soit prise pour troisième axe la droite OZ oblique ou normale qui définit l'ensemble des sections planes qu'on veut considérer.

L'ordonnée de la surface parallèle à l'axe des Z pourra

(*) Selon M. Spottiswoode, on peut mener en chaque point d'une surface DIX coniques, réelles ou imaginaires par couples, ayant avec cette surface un contact du cinquième ordre, c'est-à-dire six points communs (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 21 mars 1870); mais l'auteur n'ayant pas défini le système de sections qui offrent ce nombre de dix coniques surosculatrices, l'énoncé de son théorème paraît être incomplet.

être développée sous la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} Z = &\frac{1}{2!}(b_0 x^2 + 2 b_1 xy + b_2 y^2) + \frac{1}{3!}(c_0 x^3 + 3 c_1 x^2 y + \ldots) \\ &+ \frac{1}{4!}(d_0 x^4 + 4 d_1 x^3 y + \ldots) + \frac{1}{5!}(e_0 x^5 + \ldots + e_5 y^5) + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Considérons un plan mené par l'axe des Z et dont la trace sur le plan des XY fasse avec l'axe des X un angle θ. Toute courbe tracée dans ce plan de manière à y toucher en O cette même trace prise pour axe des x' aura dans son plan une équation de la forme

$$(2)\qquad Z = \frac{1}{2!} q x'^2 + \frac{1}{3!} r x'^3 + \frac{1}{4!} s x'^4 + \frac{1}{5!} t x'^5 + \ldots .$$

Or, si ce développement (2) doit représenter la section elle-même, on aura les relations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} q &= b_0 \cos^2\theta + 2 b_1 \sin\theta \cos\theta + b_2 \sin^2\theta, \\ r &= c_0 \cos^3\theta + 3 c_1 \sin\theta \cos^2\theta + \ldots, \\ s &= d_0 \cos^4\theta + 4 d_1 \sin\theta \cos^3\theta + \ldots, \\ t &= e_0 \cos^5\theta + 5 e_1 \sin\theta \cos^4\theta + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned} \right.$$

au lieu que, si la forme (2) devait correspondre à une conique tracée dans le plan sécant de manière à y toucher l'axe des x' à l'origine, c'est-à-dire à une conique ayant une équation de la forme

$$(4)\qquad A z^2 + 2 B x' z + C x'^2 + 2 D z = 0,$$

on trouverait aisément les valeurs correspondantes des trois premiers coefficients q, r, s en fonction des quotients $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, ou réciproquement les valeurs de ces quotients en fonction de ces trois coefficients; mais on trouverait ensuite une quatrième relation impliquant à la fois les quatre coëfficients q, r, s, t et les mêmes trois quotients $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$. Il suit de là que, quand la forme (2) représente une section conique, on a entre les quatre premiers coefficients une certaine relation, à savoir la relation

$$(5) \qquad 9tq^2 - 45qrs + 40r^3 = 0.$$

Donc, si les valeurs de q, r, s, t marquées (3) comme appartenant à la section de la surface satisfont à cette relation (5), la conique (4), dont les coëfficients $\frac{A}{D}$,... auront été déterminés par les trois premières valeurs q, r, s, aura un contact du cinquième ordre avec cette section; elle lui sera surosculatrice. Or il est aisé de voir que cette relation (5), lorsqu'on y substitue les expressions (3), donne lieu à une équation du neuvième degré en tangθ. Donc il est vrai de dire que, parmi les sections planes menées suivant une droite quelconque, oblique ou normale, mais non tangente, il y en a NEUF donnant lieu à une conique surosculatrice : étant d'ailleurs bien entendu qu'une seule de ces neuf sections à conique surosculatrice subsiste nécessairement, les huit autres pouvant être imaginaires par couples.

III.

Pour trouver la loi des coniques surosculatrices dans les sections menées par une même tangente, je supposerai le développement (1) relatif à des axes rectangulaires. J'imaginerai un plan sécant mené par l'axe des x et faisant un angle θ avec le plan des ZX. Si l'on rapporte la section correspondante à deux droites qui soient premièrement ce même axe des x, et ensuite un nouvel axe des Z qui soit la trace du plan sécant sur celui des ZY, le développement de l'ordonnée de cette section sera

$$Z = q\frac{x^2}{2!} + r\frac{x^3}{3!} + s\frac{x^4}{4!} + t\frac{x^5}{5!} + \dots$$

D'ailleurs, si l'équation de la surface est représentée par

$$Z = \varphi(x, y),$$

celle de la même section dans son plan le sera par

$$Z\cos\theta = \varphi(x, Z\sin\theta);$$

ce qui permet de calculer la suite indéfinie des coefficients $q, r, s, t, \dots$ au moyen des dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, ..., calculées elles-mêmes pour le cas de $x = 0$, c'est-à-dire la suite des coefficients $q, r, s, t, \dots$ au moyen des $b_0, b_1, b_2, c_0, \dots$.

On trouvera ainsi les relations

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} q &= \frac{b_0}{\cos\theta},\\ r &= \frac{c_0\cos\theta + 3b_1b_0\sin\theta}{\cos^2\theta},\\ s &= \frac{d_0\cos^2\theta + (6c_1b_0 + 4b_1c_0)\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta}\\ &\quad + \frac{(12b_1^2b_0 + 3b_2b_0^2)\sin^2\theta}{\cos^3\theta},\\ t &= \frac{e_0\cos^3\theta + \dots}{\cos^4\theta},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Or ici la condition pour qu'une conique tracée dans le plan sécant soit surosculatrice de la section au point O, c'est que les valeurs (3 *bis*) de q, r, s, t satisfassent à la relation (5) du paragraphe précédent. Ceci conduira à une équation du troisième degré en $\tang\theta$. Il est donc vrai de dire que, parmi les sections planes contenant une même tangente, il en est TROIS donnant lieu à une conique osculatrice, TROIS dont l'une au moins est toujours réelle. D'ailleurs, l'une de ces trois sections est le plan tangent lui-même, et la conique surosculatrice y résulte du système des deux asymptotes de l'indicatrice.

IV.

Cercles surosculateurs. — Ces sortes de cercles sont dignes de remarque, parce que les points auxquels ils correspondent dans les courbes planes sont analogues à ceux qu'on appelle *sommets* dans les sections coniques. Or, parmi toutes les sections normales en un même point, il y en a TROIS qui donnent lieu à un cercle surosculateur, et parmi les sections contenant une même tangente il n'y en a qu'UNE.

Paraboles surosculatrices. — Parmi les sections normales relatives à un même point, le nombre des sections douées à ce point d'une parabole surosculatrice dépend d'une équation du SIXIÈME degré; de sorte que ce nombre est l'un des suivants : 0, 2, 4 ou 6. De plus, parmi les sections contenant une même tangente, il y en a DEUX seulement qui sont douées de paraboles surosculatrices, et ces deux peuvent être imaginaires.

Nota. — Je ne développe pas les calculs relatifs aux cas du cercle et de la parabole : premièrement, parce qu'il n'y a qu'à appliquer les principes exposés dans les précédents paragraphes; secondement, parce que les résultats correspondants ont été donnés autrefois dans un Mémoire *Sur la courbure des lignes et des surfaces*, présenté à l'Académie des Sciences (séance du 4 mai 1840), et dont un extrait a été inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville (1841).