

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 189-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__189_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 957

(voir 2^e série, t VIII, p. 479).

SOLUTION DE M. LIONNET.

Euler dit avec raison que Fermat, en proposant cette question aux géomètres de son temps, avait en vue un

mode de démonstration exclusivement géométrique, à la manière des anciens qui rejetaient toute espèce de démonstration algébrique (*Demonstrationes quæ analysin olent*). Sans cette explication, on aurait de la peine à comprendre qu'une question si facile à résoudre ait été proposée par Fermat, et qu'aucun des géomètres contemporains n'en ait donné la solution. Celle que nous proposons aux lecteurs des *Nouvelles Annales* nous paraît remplir toutes les conditions exigées par le célèbre géomètre toulousain.

ÉNONCÉ. — Étant donné un demi-cercle AMB dont AB est le diamètre, et, de l'autre côté de AB, un rectangle ABCD dont la hauteur AD est égale au côté du carré inscrit dans le cercle, d'un point quelconque M de la demi-circonférence on mène les droites MC, MD qui coupent AB aux points c, d; et il s'agit de démontrer que

$$(1) \quad \overline{Ac}^2 + \overline{Bd}^2 = \overline{AB}^2 (*).$$

DÉMONSTRATION. — Menons les droites MA, MB jusqu'à la rencontre de la direction CD en A', B', puis AE perpendiculaire à MA' jusqu'à la rencontre de A'B' en E. L'angle AMB inscrit dans un demi-cercle étant droit, les lignes AE, BB' perpendiculaires à MA' sont parallèles, et, de plus, égales entre elles comme opposées dans un parallélogramme; donc les triangles rectangles ADE, BCB' ayant l'hypoténuse égale et un autre côté AD = BC, le troisième côté DE = B'C. De plus, les droites parallèles AB, A'B' étant divisées aux points c et C, d et D

(*) AB, CD étant des droites quelconques, nous désignons par $\overline{AB}^2$ le carré construit sur AB, et par $\text{rect}(AB, CD)$ le rectangle dont AB, CD sont les deux dimensions.

en segments proportionnels, on a

$$AB : A'B' = Ac : A'C = Bd : B'D;$$

donc le triangle ayant pour côtés les droites AB , Ac , Bd , dont la plus grande est moindre que la somme des deux autres, est semblable au triangle qui a pour côtés les droites $A'B'$, $A'C$, $B'D$: donc, pour établir l'égalité (1), il suffit de prouver que ce dernier triangle est rectangle, ou, autrement, qu'on a

$$(2) \quad \overline{A'C}^2 + \overline{B'D}^2 = \overline{A'B'}^2.$$

Or la somme des carrés faits sur $A'C$ et $B'D$, sommes des droites $A'D$, CD et CD , $B'C$, est égale à la somme des carrés faits sur $A'D$, CD , $B'C$, plus $\overline{CD}^2$, plus deux fois la somme des rectangles ($A'D$, CD), (CD , $B'C$); et, d'autre part, le carré fait sur $A'B'$, somme des droites $A'D$, CD , $B'C$, est égal à la somme des carrés faits sur ces trois droites, plus deux fois la somme des rectangles ($A'D$, CD), (CD , $B'C$), ($A'D$, $B'C$); donc, pour démontrer l'égalité (2), il suffit de prouver qu'on a.

$$\overline{CD}^2 = 2 \text{ rect } (A'D, B'C),$$

ou

$$(3) \quad 2 \overline{AD}^2 = 2 \text{ rect } (A'D, DE),$$

en observant que AD est égal au côté du carré inscrit dans le cercle dont le diamètre $AB = CD$, et que $B'C = DE$. Mais chacune des lignes AA' , AE , $A'E$ dont la dernière égale $A'D + DE$, étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on a

$$\overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \overline{AD}^2 = \overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \text{ rect } (A'D, DE),$$

ou

$$2 \overline{AD}^2 = 2 \text{ rect } (A'D, DE). \quad \text{C. Q. F. D.}$$