

GRANT

Démonstration d'un théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 188-189

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__188_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (*) ;

PAR M. GRANT,

Elève de l'institution Massin.

Un cercle variable, assujéti à passer par un point fixe P, coupe une conique aux points A, A', A'', A'''. Démontrer que la quantité $\frac{PA \cdot PA' \cdot PA'' \cdot PA'''}{R^2}$ est constante, R étant le rayon du cercle.

Soient d et d' les distances du point P avec les deux droites AA' et A''A''' . On a, d'après un théorème connu,

$$PA \cdot PA' = 2dR,$$

$$PA'' \cdot PA''' = 2d'R,$$

d'où

$$\frac{PA \cdot PA' \cdot PA'' \cdot PA'''}{R^2} = 4dd'.$$

Tout revient à démontrer que dd' est constant. Je prends des axes rectangulaires dont l'origine est en P. Les équations de la conique et du cercle sont

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by &= 0. \end{aligned}$$

Pour une certaine valeur de λ , l'équation

$$(1) \quad (A + \lambda)x^2 + 2Bxy + (C + \lambda)y^2 + \dots + F = 0$$

devra représenter les deux droites AA' et A''A''' , c'est-

(*) Ce théorème s'étend à toutes les courbes algébriques ; voir (*Comptes rendus*, janvier 1865) une Note de M. Laguerre sur les propriétés générales des courbes algébriques.

à-dire que, si les équations de ces deux droites sont

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0,$$

$$x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - d' = 0,$$

l'équation (1) devra, pour une certaine valeur de λ , être identique à l'équation

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - d)(x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - d') = 0,$$

ou bien

$$x^2 \cos \alpha \cos \alpha' + 2xy \sin(\alpha + \alpha') + y^2 \sin \alpha \sin \alpha' + \dots + dd' = 0.$$

J'identifie; l'on a

$$\frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{A + \lambda} = \frac{\sin \alpha \sin \alpha'}{C + \lambda} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{B} = \frac{dd'}{F};$$

d'où

$$\frac{\cos(\alpha + \alpha')}{A - C} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{B} = \frac{dd'}{F},$$

et, par suite,

$$dd' = \frac{F}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}};$$

ce qui démontre que dd' est constant.
