Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 515-525
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__515_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 928

(voir 2e série, t. VIII, p. 144);

PAR M. A. GARET,
Élève du lycée de Clermont.

Former l'équation des coniques qui passent par deux points imaginaires conjugués, l'un de ces points ayant pour coordonnées

$$x = a(\cos 45^\circ + \sqrt{-1}\sin 45^\circ),$$
$$y = b(\cos 45^\circ - \sqrt{-1}\sin 45^\circ),$$

et qui ont pour centre l'origine des coordonnées. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y. (J.-CH. DUPAIN.)

Ces coniques étant rapportées à leur centre, leur équation est de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 - 1 = 0.$$

J'exprime qu'elles passent par les points donnés dans l'énoncé, et j'ai, en tenant compte de ce que

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(1)\qquad -Ab^2\sqrt{-1} + Bab + Ca^2\sqrt{-1} - 1 = 0,$$

$$(2)\qquad +Ab^2\sqrt{-1} + Bab - Ca^2\sqrt{-1} - 1 = 0.$$

L'une quelconque de ces relations donne, en égalant à zéro les parties réelles et les parties imaginaires,

$$Bab - 1 = 0,\quad Ca^2 - Ab^2 = 0,$$

$$B = \frac{1}{ab},\quad C = \frac{Ab^2}{a^2};$$

de sorte que l'équation des coniques répondant à l'énoncé est

$$(3)\qquad Ay^2 + \frac{xy}{ab} + \frac{Ab^2}{a^2}x^2 - 1 = 0.$$

x et y étant les coordonnées du point de contact d'une tangente parallèle à l'axe des y, on a

$$(4)\qquad 2Ay + \frac{x}{ab} = 0.$$

Éliminant A entre les équations (3) et (4), j'ai l'équation du lieu, qui est

$$a^2xy^2 - b^2x^3 - 2a^3by = 0.$$

Cette équation donne une courbe facile à construire.

Note. — La question 927 a été résolue de même par MM. Garet et G. Lalanne, élèves du lycée de Clermont.

Question 931

(voir 2e série, t. VIII, p. 192);

PAR M. FOURET.

Lorsque x et y représentent les inverses des segments formés sur des axes de coordonnées par une droite mo-

bile, l'équation $\varphi(x, y) = 0$ est, comme on sait, l'équation d'une courbe enveloppe de cette droite. Supposant les axes rectangulaires, on demande la signification géométrique de la fonction différentielle

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2},$$

et, par suite, ce que représente par rapport à la courbe $\varphi(x, y) = 0$ l'intégrale de cette fonction différentielle prise entre des limites données. (Abel Transon.)

Soient r la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la droite mobile et θ l'angle que fait cette perpendiculaire avec l'axe des x, on a

$$\frac{1}{x} = \frac{r}{\cos\theta}, \quad \frac{1}{y} = \frac{r}{\sin\theta};$$

d'où

$$(1) \qquad x = \frac{\cos\theta}{r}, \quad y = \frac{\sin\theta}{r}.$$

En différentiant ces deux équations, on obtient

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= -\frac{\cos\theta}{r^2}\,dr - \frac{\sin\theta}{r}\,d\theta, \\ dy &= -\frac{\sin\theta}{r^2}\,dr + \frac{\cos\theta}{r}\,d\theta. \end{aligned} \right.$$

On conclut des équations (1)

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2},$$

et des équations (2)

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{r^4}.$$

Par suite

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}.$$

On voit immédiatement que le second membre de cette égalité est la différentielle de l'arc de la courbe dont les coordonnées polaires sont r et θ, c'est-à-dire de la podaire par rapport à l'origine de la courbe $\varphi(x, y) = 0$.

L'intégrale prise entre des limites données de la fonction différentielle

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2}$$

représente, par conséquent, l'arc de la podaire compris entre les points de cette courbe qui correspondent aux limites en question.

Question 935

(voir 2e série, t. VIII, p. 240);

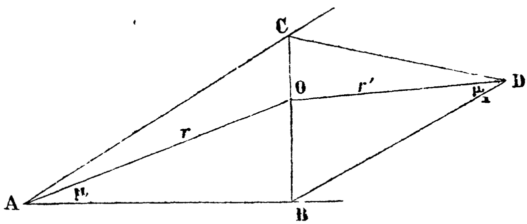
PAR M. E. NETTO,
Étudiant en Mathématiques à Berlin.

Étant données sur un même plan deux figures composées : l'une du point O *et des droites* A *et* B ; *l'autre du point* O′ *et des droites* A′ *et* B′, *mener par chacun des points donnés une transversale telle, que les segments compris sur l'une entre le point* O *et les droites* A *et* B *soient égaux aux segments compris sur l'autre entre le point* O′ *et les droites* A′ *et* B′.

Même problème en remplaçant dans chaque figure les droites par des circonférences passant par le point donné. (G. FOURET.)

Dans les angles donnés les points O, O′ sont fixés par les longueurs r, r_1 des droites menées de ces points aux sommets des angles, et par les angles μ, μ_1 que ces droites forment avec des côtés des angles donnés. Si, en supposant le problème résolu, la droite COB (*fig.* 1) représente la transversale cherchée dans le premier angle CAB, en transportant la seconde figure de manière que les lignes égales coïncident, comme l'indique la *fig.* 1, on

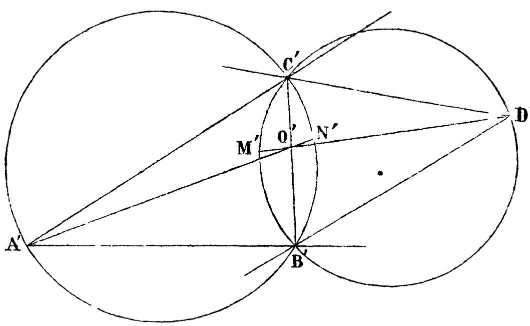
Fig. 1.



formera un quadrilatère ABDC, et il sera facile de construire une figure semblable à ce quadrilatère.

A cet effet, décrivons sur une droite quelconque B'C' (*fig.* 2) des segments capables (B'A'C', B'D'C') des angles BAC, BDC, et prenons sur les arcs B'M'C', B'N'C,

Fig. 2.



les points M', N', de manière que les angles B'A'N', B'D'M' soient respectivement égaux aux angles BAO, BDO (*fig.* 1), ou μ, μ_1. Cela fait, il faut mener par les points M', N' des droites M'O'D', N'O'A' qui rencontrent la corde B'C' en un point O' tel, qu'on ait

$$\frac{O'A'}{O'D'} = \frac{r}{r_1}.$$

Or

$$O'M'.O'D' = O'B'.O'C' = O'N'.O'A';$$

d'où

$$\frac{O'M'}{O'N'} = \frac{O'A'}{O'D'} = \frac{r}{r_1}.$$

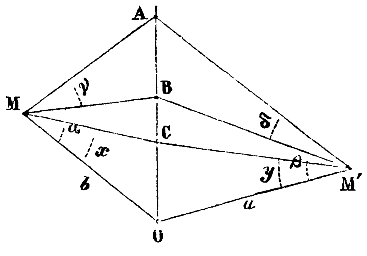
On obtiendra donc O′ en déterminant sur la droite C′B′ un point dont les distances aux deux points M′, N′ soient entre elles dans le rapport donné $\frac{r}{r_1}$: ce qui est un problème connu. En menant les droites N′O′, M′O′, on aura les sommets A′, D′ du quadrilatère A′B′D′C′, qui sera ainsi déterminé. La construction d'une figure semblable ABCD, dans laquelle les droites AO, DO sont les homologues de A′O′, D′O′, donnera la solution de la question proposée (*).

Solution de la même question;

PAR M. COHEN,
Élève du lycée de Strasbourg (classe de M. Pruvost).

En supposant le problème résolu, on a deux figures dont les bases sont superposables. Amenons ces deux bases à coïncider (*fig.* 3) et joignons les intersections M, M′

Fig. 3.



(*) Cette solution géométrique nous fait regretter que M. *Netto* n'ait rien dit du cas où les droites sont remplacées par des circonférences.

(G.)

des droites A, B et A′, B′ par la droite MM′ qui coupe AB en C, il en résulte deux faisceaux qui ont un rayon commun et même rapport anharmonique.

Soient $OMM' = x$, $OM'M = y$, $BMO = \alpha$, $BM'O = \beta$, $AMB = \gamma$, $AM'B = \delta$, on aura la relation

$$\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} : \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} : \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin\delta},$$

ou, en chassant les dénominateurs et développant

$$\sin(\alpha - x) \quad \text{et} \quad \sin(\beta - y):$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin\alpha.\sin(\beta + \delta)}{\sin\delta.\sin(\alpha + \gamma)} \sin x(\sin\beta\cos y - \sin y\cos\beta) \\ &\quad = \sin y(\sin\alpha\cos x - \sin x\cos\alpha). \end{aligned} \right.$$

En posant $OM' = a$, $OM = b$, le triangle OMM' donne

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\sin y = \frac{b}{a}\sin x,$$

et

$$\cos y = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x}.$$

En remplaçant $\sin y$ et $\cos y$ par ces valeurs, la relation (1) devient, si l'on pose $\dfrac{b\sin\delta.\sin(\alpha + \gamma)}{a\sin\alpha.\sin(\beta + \delta)} = A$,

$$A(\sin\alpha\cos x - \sin x\cos\alpha) = \sin\beta\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x} - \frac{b}{a}\cos\beta\cos x.$$

Isolons le radical et élevons au carré les deux membres, il viendra

$$\left(A^2\cos^2\alpha - 2A\frac{b}{a}\cos\alpha\cos\beta + \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2 x + A^2\sin^2\alpha\cos^2 x$$
$$+ 2\left(A\frac{b}{a}\sin\alpha\cos\beta - A^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\sin x\cos x = \sin^2\beta.$$

Si nous remplaçons le second membre, $\sin^2\beta$, par $\sin^2\beta(\cos^2 x + \sin^2 x)$, l'équation deviendra homogène en $\sin x$ et $\cos x$, et en divisant par $\cos^2 x$ nous aurons une équation du second degré en $\tang x$, qui permettra de construire $\tang x$, et par suite l'angle x; on pourra alors former le triangle OMM′ et achever la figure MABOM′.

Note du Rédacteur. — M. *Cohen* indique d'une manière très-succincte comment le second cas de la question proposée peut se ramener au premier, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

La méthode suivie par M. *Netto* conduit très-simplement à une solution directe de ce second cas.

En effet, soient O et M les points d'intersection des circonférences A, B; et, de même, O′, M′ les points communs aux circonférences A′, B′. Si les droites COD, C′O′D′ satisfont aux conditions du problème, on aura O′C′ = OC, O′D′ = OD, et en déplaçant l'une des deux figures, par exemple C′O′D′M′, il sera possible de faire coïncider les points C′, O′, D′ avec les points C, O, D, et de former ainsi un quadrilatère MCM′D, dont les côtés MC, CM′, M′D, DM, feront avec la diagonale COD, des angles MCD, M′CD, M′DC, MDC, qui seront connus, parce que leurs côtés interceptent sur les circonférences considérées des arcs donnés. Il sera donc facile de construire un quadrilatère *mcm′d* semblable à MCM′D, et de trouver sur la diagonale *cd* homologue à CD un point *o* tel qu'on ait $\frac{om}{om'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}$. Pour déterminer ensuite la droite COD, il ne restera plus qu'à mener par le point O, une droite OC faisant avec OM un angle égal à l'angle *moc*.

Le problème peut admettre deux solutions, parce qu'il y a, généralement, sur la droite *cd*, deux points satisfaisant à l'égalité $\frac{om}{om'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}$.

(G.)

Questions 955 *et* 956

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 432),

PAR M. CHARLES COHEN,

Élève du lycée de Strasbourg, admis le 82ᵉ à l'École Polytechnique.

955. *En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes.*

(LAGUERRE.)

Si l'on rapporte l'ellipse proposée à ses axes de symétrie, une normale en un point $A(x', y')$ de la courbe a pour équation

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

En faisant dans cette relation $y = 0$, on voit que l'abscisse du point où la normale rencontre l'axe OX a pour valeur

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x'.$$

De même, l'abscisse du point où la normale au point $B(x'', y'')$ de la courbe rencontre l'axe OX est

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x''.$$

Par le centre O de l'ellipse considérée, menons le demi-diamètre OCD, conjugué à la corde AB et rencontrant cette corde en son milieu, C, et l'ellipse au point D. La tangente en D à l'ellipse est parallèle à AB; l'ellipse homothétique et concentrique à la proposée et passant par le point C touchera la droite AB en ce point. Il résulte de là que la perpendiculaire au milieu de AB est une normale au point C $\left(\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}\right)$ à la seconde ellipse. Comme d'ailleurs les axes des deux ellipses sont proportionnels, le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe OX a pour abscisse

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}\,\frac{x'+x''}{2},$$

demi-somme des abscisses des points où les normales en A et en B à la première ellipse rencontrent l'axe OX.

La proposition est donc démontrée.

956. *En deux points d'un ellipsoïde, on mène des normales; le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie.*

(LAGUERRE.)

Rapportons l'ellipsoïde à ses axes principaux, et soit $A(x', y', z')$ un point de l'ellipsoïde par lequel on mène une normale à cet ellipsoïde. Par le point A, menons un plan parallèle au plan des zx. L'intersection de ce plan et de l'ellipsoïde est une ellipse E qui se projette en vraie grandeur sur le plan des zx, suivant une ellipse E' homothétique et concentrique à l'ellipse principale du plan des zx.

La tangente menée à l'ellipse E par le point A forme, avec la normale en ce point à l'ellipsoïde, un angle droit.

Cette tangente, qui est l'un des côtés de l'angle droit, est parallèle au plan des zx; donc la projection de cet angle droit sur le plan des zx est un angle droit; et, comme la tangente à l'ellipse E se projette suivant une tangente à l'ellipse E$'$, il en résulte que la normale à l'ellipsoïde au point A se projette sur le plan des zx suivant une normale à l'ellipse E$'$.

La coordonnée x du point où la normale en A à l'ellipsoïde rencontre le plan des xy, qui est égale à l'abscisse du point où la normale à l'ellipse E$'$ rencontre OX, a pour valeur, comme on l'a vu précédemment,

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x'.$$

Par analogie, la coordonnée y de ce même point sera

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} y'.$$

De même, les coordonnées du point où la normale au point B(x'', y'', z'') rencontre le plan des xy seront

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x'' \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} y''.$$

En considérant, comme dans le problème précédent, un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde donné, et touchant la corde AB en son milieu C, on aura, pour les coordonnées du point où la normale en C$\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}, \frac{z' + z''}{2}\right)$ à ce second ellipsoïde rencontre le plan des xy, les valeurs

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} \frac{x' + x''}{2} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} \frac{y' + y''}{2};$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Note. — Des solutions peu différentes nous ont été adressées par M. Harkema, étudiant en mathématiques à Saint-Pétersbourg, et M. Fould, élève à Sainte-Barbe.