

PH. GILBERT

Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 434-437

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8_434_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES
D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;**

PAR M. PH. GILBERT.

Posons

$$\sigma_{n,p} = \mu^p + (\mu + \alpha)^p + (\mu + 2\alpha)^p + \dots + (\mu + n\alpha)^p,$$

n et p étant des nombres entiers. On trouve, dans tous les

Traité d'Algèbre, une formule pour calculer $\sigma_{n,p}$ au moyen de $\sigma_{n,p-1}, \sigma_{n,p-2}, \dots, \sigma_{n,1}$. En outre, plusieurs géomètres (*) ont donné diverses expressions de $\sigma_{n,p}$ en fonction explicite de n , mais la loi de formation des coefficients est assez compliquée. Mon but, dans cette Note, est d'exprimer $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-1}, \sigma_{n,p-2}, \dots$, ce qui n'a pas été fait, à ma connaissance, et ce qui me paraît offrir divers avantages, entre autres celui d'abrégier les calculs.

Si l'on pose

$$u = e^{\mu x \sqrt{-1}} + e^{(\mu+\alpha)x \sqrt{-1}} + \dots + e^{(\mu+n\alpha)x \sqrt{-1}},$$

on aura, pour $x = 0$,

$$\left(\frac{d^p u}{dx^p} \right)_0 = (\sqrt{-1})^p \sigma_{n,p}.$$

D'ailleurs, on trouve sans peine

$$u \sin \frac{\alpha x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[e^{\left(\mu+n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}} - e^{\left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)x\sqrt{-1}} \right],$$

et en différentiant $(p+1)$ fois par rapport à x les deux membres de cette équation, puis faisant $x = 0$, on aura

$$\begin{aligned} (p+1) \frac{\alpha}{2} \left(\frac{d^p u}{dx^p} \right)_0 \sin \frac{\pi}{2} &+ \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(\frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} \right)_0 \sin \frac{2\pi}{2} \\ &+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \left(\frac{d^{p-2} u}{dx^{p-2}} \right)_0 \sin \frac{3\pi}{2} + \dots \\ &+ (p+1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^p \left(\frac{du}{dx} \right)_0 \sin \frac{p\pi}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{p+1} u_0 \sin \frac{(p+1)\pi}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{-1})^p}{2} \left[\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2} \right)^{p+1} \right]. \end{aligned}$$

(*) M. PUISEUX, *Journal de M. Liouville*, 1846, p. 477. — M. PEPIN, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1856, p. 27. — M. CATALAN, même volume, p. 230, et *Mélanges mathématiques*, p. 110.

Substituons à $\left(\frac{d^i u}{dx^i}\right)_0$ sa valeur $(\sqrt{-1})^i \sigma_{n,i}$, remplaçons $\sin \frac{2i\pi}{2}$ par zéro, divisons toute l'équation par $(\sqrt{-1})^p \frac{\alpha}{2}$, nous trouverons enfin :

1° Si p est pair,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & (p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} \\ & + \frac{(p+1)p \dots (p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \sigma_{n,p-4} + \dots + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \sigma_{n,0} \\ & = \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}; \end{aligned} \right.$$

2° Si p est impair,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & (p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma_{n,p-2} + \dots \\ & + (p+1) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-1} \sigma_{n,1} \\ & = \frac{\left(\mu + n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1} - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)^{p+1}}{\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules qui donnent $\sigma_{n,p}$ en fonction de $\sigma_{n,p-2}$, $\sigma_{n,p-4}$, $\dots$.

Il importe d'observer que $\sigma_{n,0}$ est égal, toujours, à $n+1$.

Cas particuliers : 1° Si l'on fait, dans ces formules, $\mu = 0$, $\alpha = 1$, il vient

$$\sigma_{n,p} = 1^p + 2^p + \dots + n^p,$$

et les équations (1) et (2) donnent la somme des puis-

sances semblables des nombres naturels. Si p est pair,

$$\begin{aligned} (p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^2} \sigma_{n,p-2} + \dots + \frac{1}{2^p} \sigma_{n,0} \\ = \frac{(2n+1)^{p+1} + 1}{2^{p+1}}; \end{aligned}$$

si p est impair,

$$\begin{aligned} (p+1)\sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^2} \sigma_{n,p-2} + \dots \\ + (p+1) \frac{1}{2^{p-1}} \sigma_{n,1} = \frac{(2n+1)^{p+1} - 1}{2^{p+1}}. \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ces formules les propositions connues : Si l'on exprime $\sigma_{n,p}$ en fonction des puissances de $\left(n + \frac{1}{2}\right)$, l'expression ne contiendra que des puissances impaires, si p est pair, et que des puissances paires, si p est impair; si p est un nombre pair, $\sigma_{n,p}$ est toujours nul pour $n = -\frac{1}{2}$, etc. (*).

2° Faisons $\mu = \frac{\alpha}{2}$, et

$$\Sigma_{n,p} = 1^p + 3^p + 5^p + \dots + (2n+1)^p,$$

d'où

$$\sigma_{n,p} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \Sigma_{n,p}.$$

Les formules (1) et (2) se réduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} (p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma_{n,p-2} + \dots + \Sigma_{n,0} \\ = 2^p (n+1)^{p+1}; \\ (p+1)\Sigma_{n,p} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma_{n,p-2} + \dots + (p+1)\Sigma_{n,1} \\ = 2^p (n+1)^{p+1}, \end{aligned}$$

suivant que p est pair ou impair.

(*) *Traité de Calcul différentiel* de M. BERTRAND, p. 350.