

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8
(1869), p. 374-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__374_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES
DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 945

(voir 2^e série, t. VIII, p. 276) ;

PAR M. AOUIT,

Élève au collège de Blaye.

Relations d'identité entre les angles d'un triangle rectiligne :

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \quad & \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \\
 &= 2 (\sin A + \sin B + \sin C) (\cos A + \cos B + \cos C - 1) ; \\
 2^{\circ} \quad & (\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 4 (\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\
 & \quad + (\cos A + \cos B + \cos C - 1)^2 \\
 &= 4 (\sin B \sin C + \sin A \sin C + \sin A \sin B).
 \end{aligned}$$

(J.-CH. DUPAIN.)

1° On sait qu'on a

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C). \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant au second membre le double des quantités égales

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

et

$$\sin(B + C) + \sin(A + C) + \sin(A + B),$$

nous avons en développant

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C \\ + \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sin A \cos B \\ + \sin C \cos A + \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ - \sin A - \sin B - \sin C), \end{aligned}$$

ou bien, mettant $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ en facteur,

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2[\sin A(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ + \sin B(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ + \sin C(\cos A + \cos B + \cos C - 1)], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ = 2(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1). \end{aligned}$$

2° Développant, réduisant et remplaçant $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $-\cos(B + C)$, $-\cos(C + A)$, $-\cos(A + B)$, le premier membre devient

$$\begin{aligned} 2 \sin B \sin C + 2 \sin C \sin A + 2 \sin A \sin B \\ + 2 \cos B \cos C + 2 \cos C \cos A + 2 \cos A \cos B \\ - 2 \cos(B + C) - 2 \cos(C + A) - 2 \cos(A + B) \\ = 4(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A), \end{aligned}$$

à cause des termes $2 \cos B \cos C, \dots$, qui se détruisent.

On trouve encore

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R^2} = \frac{2pr}{R^2},$$

p , r , R étant le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit, et

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \left(\frac{p}{2R} \right)^2 + \left(\frac{r}{2R} \right)^2 + \frac{r}{R}.$$

On a d'un autre côté

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R},$$

d'où

$$\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B = \frac{bc + ac + ab}{4R^2},$$

d'où la relation connue

$$bc + ac + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$
