L. PAINVIN

Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 193-221

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__193_0>

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir 2e série, t VII, p. 137);

PAR M. L. PAINVIN.

§ VII. — *L'équation en λ a quatre racines égales.*

42. Lorsque l'équation en λ a quatre racines égales, les trois cas suivants peuvent se présenter :

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit.*

Lorsque l'équation en λ a une racine quadruple, et que le cône (A) *correspondant à cette racine est un cône proprement dit, les deux surfaces ont en commun une droite; elles se touchent en un point unique sur cette droite, lequel est le sommet du cône* (A). *Les deux surfaces se coupent suivant cette droite et une courbe gauche du troisième ordre; cette courbe gauche touche la droite au point* A.

Réciproquement : *Si deux surfaces ont en commun une droite, et si la cubique gauche d'intersection touche cette droite, c'est-à-dire si les deux points de cette droite où les surfaces se touchent viennent à se confondre, l'équation en λ a ses quatre racines égales, et le cône correspondant est un cône proprement dit.*

Le point où les deux surfaces se touchent est le seul point qui ait même plan polaire par rapport aux deux snrfaces; ce plan polaire est le plan tangent commun.

DEUXIÈME CAS. — *Le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans distincts.*

1° *Lorsque le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans distincts, et que la droite* AB, *intersection de ces deux plans, n'appartient pas aux deux surfaces, cette droite* AB *touche les deux surfaces en un même point* A. *Les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes ; une de ces courbes est une conique proprement dite touchant en* A *l'intersection des deux plans; la seconde courbe se compose de deux droites qui se coupent en* A, *c'est-à-dire que l'un de ces plans est un plan tangent commun, et coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes droites. La réciproque est vraie.*

Les points de la droite AB *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces ; ce sont les seuls points jouissant de cette propriété ; ces plans polaires passant par une même droite, laquelle est conjuguée harmonique de* AB *par rapport aux deux droites communes aux deux surfaces.*

Un plan quelconque, passant par le point de contact A, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices ; le contact est du second ordre.*

2° *Lorsque la droite* AB, *intersection des deux surfaces, appartient aux deux surfaces, ces surfaces ont en commun trois droites :* AB, AD, BC; *les deux dernières rencontrent la première. Les deux surfaces se* RACCORDENT *suivant la droite* AB.

Tout plan passant par le point A *ou par le point* B, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices ; le contact est du second ordre.*

TROISIÈME CAS. — *Le cône, correspondant à la racine quadruple, se réduit à deux plans coïncidents.*

Les deux surfaces ont en commun deux droites situées *dans ce plan et se* RACCORDENT *suivant ces deux droites. La réciproque est vraie.*

Tous les points de ce plan ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; ces plans passent tous par le point de concours A *des deux droites déjà signalées.*

Un plan quelconque, passant par le point A, *coupe les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le contact est du troisième ordre.*

I. *Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit.*

43. Prenons pour sommet A du tétraèdre de référence le sommet du cône correspondant à cette racine, l'équation du cône ne devra pas renfermer de termes en x, et on en conclut pour les équations des deux surfaces

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + A_{22}y^2 \\ &\qquad + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ &A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + B_{22}y^2 \\ &\qquad + B_{33}z^2 + B_{44}t^2 + 2B_{23}yz + 2B_{24}yt + 2B_{34}zt = 0; \end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est alors

$$(2)\quad (\lambda+1)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21}(\lambda+1) & B_{22}+\lambda A_{22} & B_{23}+\lambda A_{23} & B_{24}+\lambda A_{24} \\ A_{31}(\lambda+1) & B_{32}+\lambda A_{32} & B_{33}+\lambda A_{33} & B_{34}+\lambda A_{34} \\ A_{41}(\lambda+1) & B_{42}+\lambda A_{42} & B_{43}+\lambda A_{43} & B_{44}+\lambda A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

et le cône correspondant à la racine -1 a pour équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(A_{22}-B_{22})y^2 + (A_{33}-B_{33})z^2 + (A_{44}-B_{44})t^2 \\ &\qquad + 2(A_{23}-B_{23})yz + 2(A_{24}-B_{24})yt + 2(A_{34}-B_{34})zt = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (2) doit admettre quatre fois la racine -1; en écrivant que le déterminant s'annule pour $\lambda = -1$, il vient

$$(4) \qquad A_{11} \begin{vmatrix} B_{22} - A_{22} & B_{23} - A_{23} & B_{24} - A_{24} \\ B_{32} - A_{32} & B_{33} - A_{33} & B_{34} - A_{34} \\ B_{42} - A_{42} & B_{43} - A_{43} & B_{44} - A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Le second facteur de l'égalité (4) exprime, en l'égalant à zéro, que le cône (3) se réduit à deux plans ; laissant de côté cette hypothèse, on a donc

$$(1^\circ) \qquad A_{11} = 0.$$

Les plans tangents en A, à chacune des surfaces (1), coïncident, et l'équation de ce plan tangent commun est

$$A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t = 0;$$

prenons ce plan pour face BAC du tétraèdre de référence, on devra faire

$$(2^\circ) \qquad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0.$$

L'équation en λ devient alors

$$(5) \qquad A_{14}^2 (\lambda + 1)^2 \begin{vmatrix} B_{22} + \lambda A_{22} & B_{23} + \lambda A_{23} \\ B_{32} + \lambda A_{32} & B_{33} + \lambda A_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient A_{14} ne peut pas être nul, autrement les surfaces (1) se réduiraient à des cônes.

Écrivons que l'équation (5) admet trois fois la racine -1, il vient

$$(6) \qquad (B_{22} - A_{22})(B_{33} - A_{33}) - (B_{23} - A_{23})^2 = 0;$$

l'égalité (6) exprime que le plan ABC, ou $t = 0$, touche le cône (3) ; prenons la génératrice de contact pour arête AB du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$(3^\circ) \qquad B_{22} = A_{22}, \quad B_{23} = A_{23},$$

l'équation en λ devient

$$(7) \qquad (\lambda+1)^3 \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32}(\lambda+1) & B_{33}+\lambda A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ecrivons enfin que l'équation (7) admet quatre fois la racine -1, on trouve

$$A_{22}(B_{33}-A_{33}) = 0;$$

or, on ne peut pas supposer $B_{33} = A_{33}$, autrement le cône (3) se réduirait à deux plans; on devra donc faire

$$(4^\circ) \qquad A_{22} = 0 \quad \text{d'où} \quad B_{22} = 0.$$

Ainsi, les équations des deux surfaces se ramènent à la forme

$$(8) \quad \begin{cases} 2xt + 2dyz + az^2 + bt^2 + fyt + 2hzt = 0, \\ 2xt + 2dyz + a_1z^2 + b_1t^2 + f_1yt + 2h_1zt = 0; \end{cases}$$

et l'équation du cône (A), correspondant à la racine quadruple, est alors

$$(9)\ (\mathrm{A}) \quad (a-a_1)z^2 + (b-b_1)t^2 + 2(f-f_1)yt + 2(h-h_1)zt = 0.$$

Nous pouvons déjà conclure de là que :

« Lorsque l'équation en λ a une racine quadruple, et
» que le cône (A) correspondant à cette racine est un
» cône proprement dit, les deux surfaces ont en commun
» une droite; elles se touchent en un point unique sur
» cette droite, ce point est le sommet du cône correspon-
» dant à la racine quadruple. Les deux surfaces se cou-
» pent suivant une droite et une courbe du troisième or-
» dre; la courbe gauche touche la droite. »

Réciproquement : « Si deux surfaces ont en commun
» une droite, et si les deux points de cette droite où les
» deux surfaces se touchent viennent à se confondre,
» l'équation en λ a ses quatre racines égales, et le cône

» correspondant à la racine quadruple est un cône pro-
» prement dit. »

Nous laisserons de côté la démonstration de la réciproque.

44. Nous allons maintenant donner une forme plus simple aux équations (8) des deux surfaces.

Le plan BAC, ou $t = 0$, coupe chacune des surfaces suivant les deux droites

$$az^2 + 2dyz = 0, \quad a_1 z^2 + 2dyz = 0;$$

une de ces droites est commune, c'est la droite AB; les deux autres droites sont distinctes, car a_1 est différent de a, sans quoi le cône (9) se réduirait à deux plans.

Prenons l'une de ces droites pour arête AC du tétraèdre, c'est-à-dire supposons

$$(1^\circ) \qquad a_1 = 0;$$

nous choisirons ensuite pour face CAD le second plan tangent mené au cône (9) suivant l'arête AC, le premier est le plan CAB; d'ailleurs, ces deux plans ne peuvent pas se confondre, car l'arête AC ($y = 0$, $t = 0$) ne peut appartenir au cône, puisque $(a - a_1)$ n'est jamais nul. Nous prendrons enfin, pour arête AD, la génératrice de contact du plan CAD avec le cône (9); ce qui revient à supposer

$$(2^\circ) \qquad b_1 = b, \quad h_1 = h.$$

Les équations des deux surfaces deviennent par suite

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2xt + 2dyz + az^2 + bt^2 + 2fyt + 2hzt = 0, \\ 2xt + 2dyz + bt^2 + 2f_1 yt + 2hzt = 0; \end{array} \right.$$

et celle du cône est

$$(11) \qquad (A) \quad az^2 + 2(f - f_1)yt = 0.$$

Dans le tétraèdre de référence, les arêtes AB, AC, AD, sont seules déterminées; il reste à choisir les trois sommets B, C, D.

Remarquons que la droite AD ($y = 0$, $z = 0$) rencontre les deux surfaces aux deux mêmes points; l'un est le point A, l'autre est déterminé par l'équation

$$2x + bt = 0;$$

prenons ce dernier point pour sommet D, c'est-à-dire faisons

$$(3^\circ) \qquad b = 0.$$

Les plans tangents en D à chacune des surfaces ont respectivement pour équations

$$f'_t = 0,$$

c'est-à-dire

$$x + fy + hz = 0,$$
$$x + f_1 y + hz = 0;$$

ces deux plans sont distincts, car le cône (11) étant un cône proprement dit, f_1 doit être différent de f; nous choisirons pour face DBC le plan tangent à la seconde des surfaces (10), c'est-à-dire que nous supposerons

$$(4^\circ) \qquad f_1 = 0, \quad h = 0.$$

Ainsi *les équations des deux surfaces pourront se ramener à la forme définitive*

$$(12) \qquad \begin{cases} (S) & xt + kyz + az^2 + fyt = 0, \\ (T) & xt + kyz = 0. \end{cases}$$

Le sommet A est le point où les deux surfaces se touchent; AB est la droite commune; BAC est le plan tangent commun en A. L'arête AC est la seconde des droites suivant lesquelles le plan BAC coupe la seconde surface, CAD est le plan tangent au cône correspondant à la racine quadruple, AD est la génératrice de contact. Le sommet D est le second des points où la droite AD rencontre les deux surfaces, et DBC est le plan tangent en D à la seconde surface.

45. Les plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0) par rapport aux surfaces (12), sont

$$(13)\quad \begin{cases} xt_0 + y(kz_0 + ft_0) + z(ky_0 + 2az_0) + t(x_0 + fy_0) = 0, \\ xt_0 + kyz_0 + kzy_0 + tx_0 = 0; \end{cases}$$

à l'aide de ces équations on constate immédiatement que :

« Il y a un seul point qui ait même plan polaire par
» rapport aux deux surfaces, c'est le point A où la cubi-
» que gauche touche la droite commune AB; le plan po-
» laire est le plan tangent commun.

II. *Le cône correspondant à la racine quadruple se réduit à deux plans distincts.*

46. Nous prendrons ces deux plans pour faces ABC et ABD du tétraèdre de référence, les équations des deux surfaces seront les équations (1) du n° 25, et l'équation en λ sera l'équation (2) du n° 25.

Le déterminant de l'équation (2), n° 25, doit encore s'annuler pour $\lambda = -1$, ce qui donne

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)(B_{34} - A_{34})^2 = 0;$$

or B_{34} est nécessairement différent de A_{34}, puisque les deux surfaces sont distinctes, il reste donc

$$(1)\qquad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0.$$

Les points d'intersection de la droite AB avec les deux surfaces sont les mêmes, ils sont donnés par les équations

$$(2)\qquad z = 0,\quad t = 0,\quad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0;$$

la relation (1) exprime précisément que les points (2) coïncident, c'est-à-dire que la droite AB touche les deux surfaces; prenons ce point de contact pour sommet A, on aura

$$(1^\circ)\qquad A_{11}=0,\quad A_{12}=0.$$

L'équation en λ devient alors

$$(3)\quad (\lambda+1)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32}(\lambda+1) & A_{33}(\lambda+1) & B_{34}+\lambda A_{34} \\ A_{41} & A_{42}(\lambda+1) & B_{43}+\lambda A_{43} & A_{44}(\lambda+1) \end{vmatrix}=0.$$

Exprimons enfin que cette dernière équation admet la racine -1, on trouve

$$(4)\qquad A_{22}A_{13}A_{14}=0,$$

en laissant de côté le facteur $(A_{34}-B_{34})$ qui ne peut être nul.

Nous avons ici deux cas à examiner, suivant que A_{22} est nul, ou que A_{13} est nul; l'hypothèse $A_{14}=0$ ne donne rien d'essentiellement distinct de ce que fournit l'hypothèse $A_{13}=0$; ces deux cas reviennent en définitive à ceux-ci, en ayant égard aux relations (1°) :

1° La droite AB n'est pas une droite commune aux deux surfaces, $A_{22}\lesssim 0$;

2° La droite AB est une droite commune aux deux surfaces, $A_{22}=0$.

47. 1° Supposons A_{22} différent de zéro et A_{14} nul.

Les équations des deux surfaces peuvent alors s'écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{S})\quad y^2+az^2+bt^2+2cxz\\ &\qquad\qquad +2dyz+2eyt+2fzt=0,\\ &(\mathrm{T})\quad y^2+az^2+bt^2+2cxz\\ &\qquad\qquad +2dyz+2eyt+2f_1zt=0.\end{aligned}\right.$$

Le plan ABC, ou $t=0$, coupe les deux surfaces suivant la conique

$$(6)\qquad y^2+az^2+2cxz+2dyz=0;$$

la droite AB touche cette conique en A. Le plan ABD, ou $z=0$, coupe les deux surfaces suivant les deux droites distinctes

$$(7)\qquad y^2+bt^2+2eyt=0,$$

ces deux droites se coupent au point A.

On voit par là que :

« Si le cône, correspondant à la racine quadruple, se » réduit à deux plans distincts, la droite AB, intersection » des deux plans, touche les deux surfaces au même » point A. Si cette droite n'est pas une génératrice com- » mune aux deux surfaces, ces deux surfaces se coupent » suivant deux courbes planes; une de ces courbes est » conique proprement dite touchant la droite d'intersec- » tion des deux plans en A; la seconde courbe se com- » pose de deux droites qui se coupent au point A, c'est- » à-dire que l'un des plans est un plan tangent commun » et coupe les deux surfaces suivant les deux mêmes » droites. »

Réciproquement : « Si les deux surfaces se coupent sui- » vant deux courbes planes, si l'intersection des deux » plans touche les deux surfaces au même point, et que » l'une des sections se compose de deux droites, l'équa- » tion en λ aura quatre racines égales, et le cône corres- » pondant se réduira à deux plans. »

On peut, d'après ces remarques, simplifier les équations (5).

Les plans polaires d'un plan quelconque

$$(x_0,\ y_0,\ z_0=0,\ t_0=0),$$

situé sur la droite AB, ont pour équation

$$(8) \qquad cx_0 z + y_0(y + dz + et) = 0;$$

ces plans passent tous par la droite fixe, située dans le plan ABD,

$$z = 0, \quad y + et = 0;$$

prenons cette droite pour AD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire faisons

$$e = 0,$$

l'équation (7) devient alors

$$y^2 + bt^2 = 0.$$

On conclut de là :

« Les points de l'intersection des deux plans ABC et » ABD ont même plan polaire par rapport aux deux sur- » faces, et ce sont les seuls qui jouissent de cette pro- » priété; tous ces plans passent par une droite fixe AD » qui est conjuguée harmonique de AB par rapport aux » deux droites qui constituent la section commune aux » deux surfaces situées dans le plan ABD. »

Le plan ABC, ou $t = 0$, coupe les deux surfaces suivant la conique (6); prenons : pour sommet C, un des points de cette conique; pour face BCD, le plan tangent en C à l'une des surfaces (5), à la seconde, par exemple; ceci revient à supposer

$$a = 0, \quad d = 0, \quad f_1 = 0.$$

Eu égard à ces hypothèses, *les équations des deux surfaces prennent la forme définitive*

$$(9) \qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & y^2 + bt^2 + 2cxz + 2fzt = 0, \\ (\mathrm{T}) & y^2 + bt^2 + 2cxz = 0. \end{cases}$$

« Si l'on mène un plan quelconque par le point de

» contact des deux surfaces, ce plan les coupe suivant
» des coniques osculatrices; le contact est du second
» ordre. »

En effet, soit l'équation d'un plan quelconque passant par le sommet A

$$(10) \qquad z = \alpha y + \beta t,$$

si l'on substitue cette valeur de z dans les équations (9), il vient

$$(11) \begin{cases} y^2 + 2\alpha c x y + (b + 2f\beta) t^2 + 2\alpha f y t + 2c\beta x t = 0, \\ y^2 + 2\alpha c x y + b t^2 + 2c\beta x t = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes de même sommet est

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha c(\mu+1) & \beta c(\mu+1) \\ \alpha c(\mu+1) & \mu+1 & \alpha f \\ \beta c(\mu+1) & \alpha f & b(\mu+1)+2f\beta \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs les plans tangents communs correspondants sont distincts; par conséquent, les cônes sont osculateurs et le contact est du second ordre; donc....

48. 2° Supposons A_{22} nul, c'est-à-dire que la droite AB appartient aux surfaces.

Eu égard à l'hypothèse actuelle et aux hypothèses (1°) du n° 46, les équations (1) du n° 25 des deux surfaces deviennent

$$(12) \begin{cases} (\mathrm{S})\ a z^2 + b t^2 + 2 c x z + 2 d x t + 2 e y z + 2 g y t + 2 f z t = 0, \\ (\mathrm{T})\ a z^2 + b t^2 + 2 c x z + 2 d x t + 2 e y z + 2 g y t + 2 f_1 z t = 0. \end{cases}$$

Le plan ABC, ou $t = 0$, coupe les deux surfaces suivant deux droites communes, savoir

$$z(az + 2cx + 2ey) = 0:$$

l'une d'elles est la droite AB; la seconde ne peut pas se confondre avec AB, car il faudrait pour cela qu'on eût $c = 0$, $e = 0$, et les deux surfaces se réduiraient alors à des cônes. Nous pouvons donc prendre cette seconde droite pour arête BC ($x = 0$, $z = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$a = 0, \quad e = 0.$$

Le plan ABD, ou $z = 0$, coupe les deux surfaces suivant les deux droites communes

$$t(bt + 2dx + 2gy) = 0:$$

l'une d'elles est la droite AB; la seconde ne peut pas se confondre avec AB; nous pouvons donc la prendre pour arête AD ($y = 0$, $z = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$b = 0, \quad d = 0.$$

Les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(13) \qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & cxz + gyt + f\,zt = 0, \\ (\mathrm{T}) & cxz + gyt + f_1 zt = 0. \end{cases}$$

Nous constatons d'abord que :

« Si le cône correspondant à la racine quadruple se
» réduit à deux plans et que la droite AB, intersection
» de ces deux plans, appartienne aux deux surfaces, ces
» deux surfaces auront en commun trois génératrices :
» l'une d'elles est la droite AB; les deux autres, AD et BC,
» s'appuient sur la droite AB. »

Les équations des plans tangents à chacune des surfaces (13), en un point quelconque ($x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0$) de la droite AB, sont

$$cx_0 z + gy_0 t = 0, \quad cx_0 z + gy_0 t = 0.$$

Ces plans tangents sont les mêmes, donc :

« Les deux surfaces ont même plan tangent en tous les
» points de la droite AB, c'est-à-dire se touchent en tous
» les points de cette droite, ou encore se *raccordent* sui-
» vant cette droite. »

Les plans tangents en un point $(x_0, y_0 = 0, z_0, t_0 = 0)$ de la droite AC, sont

$$cx_0 z + z_0(cx + ft) = 0, \quad cx_0 z + z_0(cx + f_1 t) = 0;$$

on voit que les surfaces (13) ne se raccordent pas suivant la droite AC; il en est de même pour la troisième génératrice commune AD.

Nous prendrons, pour sommet C, un point arbitraire de la droite AC, et pour face BCD, le plan tangent à la seconde surface, par exemple; ce qui conduit à la condition $f_1 = 0$.

D'après ce choix du tétraèdre, les *équations des deux surfaces prendront la forme définitive*

$$(14) \qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & cxz + gyt + fzt = 0, \\ (\mathrm{T}) & cxz + gyt = 0. \end{cases}$$

On démontrera sans difficulté la proposition réciproque, savoir :

« Si deux surfaces se raccordent suivant une même
» génératrice commune, l'équation en λ a ses quatre
» racines égales; le cône correspondant à la racine qua-
» druple se réduit à deux plans, et l'intersection de ces
» deux plans est la génératrice commune. »

Je signalerai encore la propriété suivante :

« Si l'on mène un plan quelconque par le point A, il
» coupe les deux surfaces suivant des coniques oscula-
» trices; le contact est du second ordre. La même chose
» a lieu pour le point B. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque, passant par le point A, est

$$y = \alpha z + \beta t;$$

substituons cette valeur dans les équations (14), il vient

$$(15) \qquad \begin{cases} cxz + (\alpha g + f)zt + \beta g t^2 = 0, \\ cxz + \alpha g zt + \beta g t^2 = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes est

$$\begin{vmatrix} 0 & c(\mu+1) & 0 \\ c(\mu+1) & 0 & \alpha g(\mu+1)+f \\ 0 & \alpha g(\mu+1)+f & \beta g(\mu+1) \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs les plans sécants communs correspondants sont distincts; par conséquent, les deux cônes sont osculateurs, et le contact est du second ordre ; donc....

III. *Le cône correspondant à la racine quadruple se réduit à deux plans coïncidents.*

49. Prenons ce plan pour face ABC du tétraèdre de référence, les équations des deux surfaces seront les équations (1) du n° 28, et l'équation en λ sera l'équation (2) du n° 28.

Écrivons que l'équation (2), n° 28, admet encore la racine -1, il vient

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

la relation (1) exprime que la section des deux surfaces (1), n° 28, par le plan ABC, ou $t = 0$, se réduit à deux droites. Prenons ces deux droites pour arêtes AB et AC du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposons

$$A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{33} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0,$$

les équations des deux surfaces deviendront

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} A_{44} t^2 + A_{14} xt + A_{23} yz + A_{24} yt + A_{34} zt = 0, \\ \frac{1}{2} B_{44} t^2 + A_{14} xt + A_{23} yz + A_{24} yt + A_{34} zt = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs la constante A_{23} ne peut pas être nulle, car on aurait alors deux plans; les équations (2) pourront donc s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} (S) \quad yz + axt + byt + czt + dt^2 = 0, \\ (T) \quad yz + axt + byt + czt + d_1 t^2 = 0. \end{cases}$$

Les plans tangents en un point quelconque

$$(x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0)$$

de la droite AB sont les mêmes, car leur équation est

$$ax_0 t + y_0(z + bt) = 0;$$

donc : « Lorsque l'équation en λ a quatre racines égales » et que le cône correspondant à la racine quadruple se » réduit à deux plans coïncidents, les deux surfaces ont » en commun deux droites situées dans ce plan, et se » raccordent suivant ces deux droites. La réciproque est » vraie. »

On constatera aussi que :

« Tous les points du plan ABC ont même plan polaire » par rapport aux deux surfaces, et ces plans passent tous » par le point de concours A des deux droites. »

80. Pour simplifier les équations (3), nous prendrons, pour sommet B, un point arbitrairement choisi sur la droite AB, et pour face ABD, le plan tangent commun en B aux deux surfaces, ce qui revient à supposer

$$b = 0;$$

nous prendrons ensuite, pour sommet C, un point arbitrairement choisi sur la droite AC, et pour face ACD, le plan tangent commun en C aux deux surfaces, ce qui revient à supposer

$$c = 0;$$

les équations des deux surfaces deviennent alors

$$(4)\qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & yz + axt + dt^2 = 0, \\ (\mathrm{T}) & yz + axt + d_1 t^2 = 0. \end{cases}$$

Enfin, nous prendrons, pour sommet D, le point où la droite AD rencontre la seconde surface; on devra faire $d_1 = 0$. *Les équations des deux surfaces se ramènent à la forme définitive*

$$(5)\qquad \begin{cases} (\mathrm{S}) & yz + axt + dt^2 = 0, \\ (\mathrm{T}) & yz + axt = 0. \end{cases}$$

« Un plan quelconque, passant par le point A, coupe » les deux surfaces suivant des coniques osculatrices; le » contact est du troisième ordre. »

En effet, l'équation d'un plan quelconque, passant par le sommet A, est

$$y = \alpha z + \beta t;$$

remplaçons y par cette valeur dans les équations (5), il vient

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha z^2 + \beta zt + axt + dt^2 = 0, \\ \alpha z^2 + \beta zt + axt = 0; \end{cases}$$

l'équation en μ relative à ces deux cônes de même sommet, est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a(\mu+1) \\ 0 & 2\alpha(\mu+1) & \beta(\mu+1) \\ a(\mu+1) & \beta(\mu+1) & 2d \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad (\mu+1)^3 = 0;$$

d'ailleurs le système des plans sécants communs t correspondant à cette racine triple se réduit à deux plans coïncidents; par conséquent, les cônes sont osculateurs et le contact est du troisième ordre; donc....

§ VIII. — *L'équation en λ a des racines nulles, des racines infinies.*

I. *L'équation en λ a des racines nulles seulement.*

51 Dans ce paragraphe, je ne ferai qu'indiquer les résultats.

1° L'équation en λ a une seule racine nulle.

« Une des surfaces est un cône (ou un cylindre) pro-
» prement dit; le sommet de ce cône n'est pas situé sur
» la surface proprement dite. »

Il y aura alors à distinguer trois cas, suivant que les trois autres racines, différentes de zéro, sont inégales, ou que deux sont égales, ou que les trois sont égales. La discussion de ces hypothèses pourra se faire en suivant une marche tout à fait semblable à celle qui a été developpée dans les paragraphes I, II, III, IV, V; d'ailleurs les conclusions essentielles restent les mêmes.

2° L'équation en λ a deux racines nulles.

« Une des surfaces est un cône, alors deux cas se pré-
» sentent :

» Si l'on a un cône proprement dit, le sommet de ce
» cône est sur la seconde surface. (Conclusions sem-
» blables à celles du n° 14, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans, l'arête de ce sys-
» tème ne touche pas la seconde surface qui est une sur-
» face proprement dite. »

3° L'équation en λ a trois racines nulles.

« L'une des surfaces est un cône, et les cas suivants
» peuvent se présenter :

» Si c'est un cône proprement dit, son sommet se

» trouve sur la seconde surface, et le cône touche le plan
» tangent à la surface en ce point. (Conclusions analo-
» gues à celles du n° 21, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans distincts, leur
» droite d'intersection touche alors la seconde surface.

» Il peut encore arriver que le cône se réduise à deux
» plans coïncidents ; ce plan ne touche pas la seconde sur-
» face. »

4° L'équation en λ a quatre racines nulles.

« Une des surfaces est un cône (ou un cylindre).

» Si l'on a un cône proprement dit, le sommet est sur
» la seconde surface; le cône touche le plan tangent en
» ce point à la seconde surface, et de plus, la génératrice
» de contact est commune au cône et à la surface.
» (Conclusions analogues à celle du n° 42, premier cas.)

» Si le cône se réduit à deux plans distincts, ou la
» droite d'intersection touche la seconde surface, et l'un
» des plans touche la surface en ce point, ou bien, la
» droite d'intersection appartient à la surface.

» Si le cône se réduit à deux plans coïncidents, ce plan
» touche alors la seconde surface. »

Remarque. — Les conclusions sont les mêmes si l'équation en λ admet des racines infinies seulement.

II. *L'équation en λ admet des racines nulles et des racines infinies.*

52. Lorsque l'équation en λ admet des racines nulles et des racines infinies, les deux surfaces sont des cônes ou des cylindres ; il est entendu que la dénomination de cône signifiera cône ou cylindre.

1° L'équation en λ a une racine nulle et une racine infinie.

« Lorsque l'équation en λ a une racine nulle et une
» racine infinie, et que les deux autres racines sont

» distinctes, l'intersection des deux cônes est une courbe
» du quatrième ordre; on rentre dans le cas général.

» Si les deux autres racines sont égales, la courbe gau-
» che possède un point double; les deux cônes se tou-
» chent en un point non situé sur la ligne des sommets;
» il peut arriver aussi que les deux cônes soient bitan-
» gents et se coupent suivant deux courbes planes. (Con-
» clusions générales analogues à celles du n° 14, pre-
» mier et deuxième cas.) »

2° L'équation en λ a deux racines nulles et une racine infinie.

« Le sommet du cône (A) correspondant à la racine
» double zéro se trouve sur le second cône (B) corres-
» pondant à la racine infinie. Les deux cônes se coupent
» suivant une courbe du quatrième ordre ayant un point
» double en A; les tangentes en ce point double sont les
» intersections du cône (A) par le plan tangent au
» cône (B) suivant l'arête BA.

» Le sommet du cône (A) se trouve également sur le
» cône (C), passant par l'intersection des cônes (A) et
» (B) et correspondant à la racine de l'équation en λ qui
» n'est ni nulle, ni infinie; le cône (C) touche suivant
» l'arête CA le plan tangent au cône (B) suivant l'a-
» rête BA. »

Il peut arriver que le cône (A) se réduise à deux plans distincts.

3° L'équation en λ a trois racines nulles et une racine infinie.

« Le cône (A) correspondant à la racine nulle a son som-
» met sur le cône (B) correspondant à la racine infinie;
» le plan tangent au cône (B) suivant l'arête BA, touche
» également le cône (A) suivant une arête AC distincte
» de AB. Les deux cônes se coupent suivant une courbe
» du quatrième ordre ayant un point de rebroussement

» en A; la tangente de rebroussement est la droite AC. »

4° L'équation en λ a deux racines nulles et deux racines infinies.

« Les deux cônes ont une génératrice commune; s'ils » ne se touchent pas suivant cette génératrice, leur in- » tersection est une courbe gauche du troisième ordre.

» S'ils se touchent suivant cette génératrice, leur » courbe d'intersection se composera de deux droites » coïncidant avec la génératrice commune, et d'une » courbe plane; mais alors l'équation en λ se réduit à » une identité. »

III. *Cas où l'équation en λ se réduit à une identité.*

53. L'équation en λ se réduit à une identité dans les cas suivants :

1° Lorsque les surfaces sont deux cônes ayant une génératrice commune et se touchant suivant cette génératrice ;

2° Lorsqu'on a deux cônes ayant même sommet;

3° Lorsque les surfaces sont deux cylindres paraboliques ayant même plan directeur;

4° Lorsque les deux surfaces sont des cylindres parallèles;

5° Lorsqu'une des surfaces est un cône, et que l'autre est un système de plans dont l'arête passe par le sommet du cône; ou bien encore, un système de plans dont l'un touche le cône; ou encore, un système de deux plans coïncidents et passant par le sommet du cône;

6° Lorsqu'une des surfaces étant un cylindre, l'autre est un système de plans dont l'arête est parallèle aux génératrices du cylindre; ou encore, un système de plans dont l'un touche le cylindre ;

7° Lorsque les surfaces se réduisent à des systèmes de deux plans et que les arêtes de ces systèmes se rencontrent.

Toutes ces propositions sont faciles à vérifier. On peut aussi les conclure d'une analyse régulière semblable à celle qui a été plusieurs fois répétée, et montrer ainsi que ce sont les seuls cas où l'équation en λ se réduit à une identité.

§ IX. — *Détermination des branches infinies de la courbe d'intersection des deux surfaces du second ordre.*

I. *Détermination générale.*

54. Je remarque d'abord qu'on obtiendra la direction des branches infinies de la courbe d'intersection en cherchant les génératrices communes aux *cônes des directions asymptotiques* (C) et (C′) des deux surfaces considérées.

L'asymptote en un de ces points à l'infini sera l'intersection des plans asymptotes correspondants dans chacune des deux surfaces.

La courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre a, en général, quatre points à l'infini (réels ou imaginaires) ; et, d'après ce qu'on vient de dire, les directions asymptotiques relatives à ces points sont les génératrices communes aux deux cônes des directions asymptotiques.

Mais la discussion de l'intersection de ces deux cônes ayant même sommet, présente les mêmes circonstances que celle de l'intersection des deux coniques, puisque les équations de ces deux cônes (qu'on peut regarder comme ayant pour sommet commun l'origine des coordonnées) sont assimilables aux équations de deux coniques.

D'après cela, les cas suivants pourront se présenter :

1° Les cônes de directions asymptotiques se coupent suivant quatre racines génératrices.

La discussion faite comme dans le cas des coniques nous indiquera si les quatre génératrices communes sont réelles, ou si deux seulement sont réelles, ou si les quatre sont imaginaires, c'est-à-dire si la courbe gauche a quatre points réels à l'infini, ou deux seulement, ou si les quatre points sont imaginaires; les branches infinies ont, dans ce cas, leurs asymptotes à distance finie.

2° Les cônes (C) et (C′) se touchent.

Les plans asymptotes correspondants sont alors parallèles, par conséquent l'asymptote correspondante de la courbe gauche se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique considérée.

Ainsi la courbe gauche a deux points distincts (réels ou imaginaires) à l'infini, elle touche, en outre, la droite de l'infini parallèle à la génératrice de contact des deux cônes (C) et (C′).

3° Les cônes (C) et (C′) sont bitangents.

Les asymptotes sont encore à l'infini; la courbe d'intersection a deux couples de points coïncidents à l'infini, elle touche le plan de l'infini en deux points; les asymptotes relatives à ces deux points sont à l'infini et respectivement parallèles aux génératrices de contact des deux cônes (C) et (C′).

4° Les cônes (C) et (C′) sont osculateurs, et le contact est du second ordre.

La courbe gauche a deux points réels à l'infini; l'un est un point simple et ordinaire, l'autre est un point d'inflexion; la tangente d'inflexion est la droite de l'infini parallèle à l'arête de contact de deux cônes.

5° Les cônes (C) et (C′) sont osculateurs, et le contact est du troisième ordre.

Les quatre points d'intersection de la courbe gauche avec le plan de l'infini se confondent; la droite à l'infini, parallèle à la génératrice de contact des deux cônes, touche la courbe gauche et a avec elle un contact du troisième ordre.

Remarque. — Ces conséquences sont évidemment applicables aux cas où les cônes (C) et (C′) ne sont pas des cônes proprement dits; ainsi, un des cônes ou tous les deux peuvent se réduire soit à un système de plans distincts, soit à un système de plans coïncidents.

Lorsqu'un des cônes, (C) par exemple, se réduit à un système de deux plans coïncidents, les deux cônes seront bitangents si le cône (C′) est un cône proprement dit, ou bien s'il est composé de deux plans distincts; les quatre génératrices seront confondues si le cône (C′) se réduit également à un système de deux plans coïncidents.

II. *Cas particuliers.*

55. Je terminerai cette question par l'examen de plusieurs cas particuliers.

1° Les deux cônes (C) et (C′) sont parallèles.

Dans ce cas, les deux surfaces sont homothétiques; elles se coupent suivant deux courbes planes, dont une est dans le plan de l'infini; c'est le deuxième cas du n° 14.

2° Les cônes (C) et (C′) étant composés de deux plans, un plan de l'un des systèmes est parallèle à un plan de l'autre système.

Si l'on prend pour plan yoz le plan directeur commun, et pour plans xoz et xoy des plans parallèles aux deux autres plans, les équations des deux surfaces seront

$$xy + ax + by + cz + d = 0,$$
$$xz + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

On voit aisément que l'équation en λ a deux couples de racines égales, ces deux surfaces ont en commun la droite de l'infini ($x = 0$, $y = 0$); un plan quelconque, parallèle au plan yoz, coupe l'une et l'autre surface suivant cette droite à l'infini, et chacune d'elles suivant une droite à distance finie. Les conclusions du n° 30, premier cas, sont applicables au cas actuel, en transportant à l'infini les points A et B.

3° Le cône (C) est un système de deux plans distincts, et le cône (C') se réduit à deux plans coïncidents parallèles à l'un des plans (C).

Les équations des deux surfaces pourront s'écrire

$$xy + ax + by + cz + d = 0,$$
$$x^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0;$$

une de ces surfaces est un cylindre parabolique. L'équation en λ possède encore deux couples de racines égales; les deux surfaces ont en commun la droite de l'infini ($x = 0$, $t = 0$); les conclusions du n° 30, premier cas, sont encore applicables au cas actuel.

4° Les cônes (C) et (C') se réduisent à des systèmes de plans coïncidents, et ces plans sont parallèles.

Les équations des deux surfaces pourront s'écrire

$$x^2 + ax + by + cz = 0,$$
$$x^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0;$$

on a deux cylindres paraboliques; ces surfaces sont homothétiques et se coupent suivant deux courbes planes, dont une est le plan de l'infini; dans ce cas l'équation en λ se réduit à une identité.

§ X. — Résumé.

I. *L'équation en λ a ses quatre racines réelles et distinctes.*

1° Si les quatre cônes sont réels, on a une courbe réelle du quatrième ordre.

2° Si deux des cônes sont imaginaires, on a une courbe imaginaire du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 = 0;$$

les coefficients sont réels.

II. *L'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires.*

Deux des cônes sont réels, les deux autres sont imaginaires ; on a une courbe réelle du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$x^2 + ay^2 + b(z^2 - t^2) + 2dzt = 0,$$
$$x^2 + a_1 y^2 + b_1(z^2 - t^2) + 2d_1 zt = 0;$$

les coefficients sont réels.

III. *L'équation en λ a ses quatre racines imaginaires.*

Les quatre cônes sont imaginaires; on a une courbe réelle du quatrième ordre.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$a(x^2 - y^2) + c(z^2 - t^2) + 2bxy + 2dzt = 0,$$
$$a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1 xy + 2d_1 zt = 0;$$

les coefficients sont réels.

IV. *L'équation en λ a deux racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit; les deux surfaces se touchent en un point; on a une courbe du quatrième ordre ayant un point double ordinaire.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0,$$
$$b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 + 2xt = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts; les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes, et se touchent en deux points non situés sur une génératrice commune.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$az^2 + bt^2 + 2xy + 2czt = 0,$$
$$az^2 + bt^2 + 2xy + 2c_1 zt = 0.$$

V. *L'équation en λ a trois racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine triple est un cône proprement dit; les deux surfaces se touchent en un point; on a une courbe du quatrième ordre ayant un point de rebroussement.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ay^2 + 2xt + bz^2 + 2cyt = 0,$$
$$k(ay^2 + 2xt) + bz^2 + 2cyt = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans distincts; les deux surfaces se touchent en un point unique et se coupent suivant deux courbes planes qui se touchent en ce point.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c\,zt = 0,$$
$$y^2 + 2a\,xz + 2b\,xt + 2c_1\,zt = 0.$$

3° Le cône correspondant à la racine triple se réduit à deux plans coïncidents; les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre; la courbe de contact est une conique proprement dite.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d_1 t^2 = 0.$$

VI. *L'équation en λ a deux couples de racines égales.*

1° Les deux cônes correspondants aux racines doubles sont des cônes proprement dits; les surfaces ont en commun une droite, se touchent en deux points de cette droite, et se coupent suivant une cubique gauche rencontrant la droite en ces deux points.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$2xz + ct^2 + az^2 + 2dyt = 0,$$
$$2xz + ct^2 + \lambda\,(az^2 + 2dyt) = 0.$$

2° Un des cônes est un cône proprement dit, et l'autre se réduit à deux plans distincts; les deux surfaces se touchent en trois points et se coupent suivant deux courbes planes, dont l'une est un système de deux droites et l'autre une conique proprement dite.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$yt + cz^2 + d\,xz = 0,$$
$$yt + cz^2 + d_1\,xz = 0.$$

3° Les deux cônes se réduisent à un système de deux plans; les deux surfaces ont en commun les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et se touchent en quatre points.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$xy + a\,zt = 0,$$
$$xy + a_1\,zt = 0.$$

VII. *L'équation en λ a quatre racines égales.*

1° Le cône correspondant à la racine quadruple est un cône proprement dit; les deux surfaces ont en commun une droite, et se touchent en un point unique sur cette droite; elles se coupent suivant une cubique gauche qui touche la droite en ce point.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$xt + kyz + az^2 + byt = 0,$$
$$xt + kyz = 0.$$

2° Le cône correspondant à la racine se réduit à deux plans distincts; soit AB leur intersection.

I. Si AB n'appartient pas aux deux surfaces, un des plans touche les deux surfaces et les coupe suivant les deux mêmes droites; l'autre plan les coupe suivant une conique touchant AB au point où viennent se couper les deux droites.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$y^2 + bt^2 + 2cxz + 2dzt = 0,$$
$$y^2 + bt^2 + 2cxz = 0.$$

II. Si AB appartient aux deux surfaces, les deux surfaces ont en commun deux autres droites s'appuyant sur AB et *se raccordent* suivant AB.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$axz + byt + czt = 0,$$
$$axz + byt = 0.$$

3° Le cône correspondant se réduit à deux plans coïncidents; les deux surfaces ont en commun deux droites situées dans ce plan et *se raccordent* suivant ces deux droites.

Formes réduites des équations des deux surfaces.

$$yz + axt + dt^2 = 0,$$
$$yz + axt = 0.$$

Pour le cas des racines nulles et infinies, je renverrai au § VIII, où se trouve le résumé relatif à ces cas particuliers.

Observation. — La discussion que nous venons de faire conduit, en interprétant les équations dans le système des coordonnées tangentielles, à la classification des *développables circonscrites* à deux surfaces du second ordre.