

J. GRAINDORGE

Question de licence. Problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 78-88

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__78_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE — PROBLÈME DE MÉCANIQUE

(voir 2^e série, t. VI, p. 44);

PAR M. J. GRAINDORGE,
Docteur ès Sciences, à Liège.

Trouver dans un plan vertical la courbe sur laquelle doit être assujéti à se mouvoir un point pesant partant d'un point donné, avec une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction, pour que la pression du mobile sur cette courbe soit à la composante normale de son poids dans le rapport constant $\frac{k}{1}$.

k est positif ou négatif suivant que la pression et la composante normale du poids sont dirigées dans le même sens ou en sens contraire. On examinera particulièrement les cas suivants :

$$k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \quad k = 3, \quad k = -1.$$

Solution. — Prenons pour origine la position initiale du point, et pour axe des x la direction de la vitesse initiale.

Si θ est l'angle que fait la tangente à la courbe au point m avec l'axe des y , la composante normale du poids g sera $g \sin \theta$, et la pression sera $N = gk \sin \theta$.

Les équations du mouvement

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = N \cos \lambda,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g + N \sin \lambda,$$

deviennent, en remarquant que $\cos \lambda = -\cos \theta$ et $\sin \lambda = \sin \theta$,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -kg \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -g(1 - k \sin^2 \theta). \end{cases}$$

Or, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \sin \theta \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \cos \theta \frac{ds}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sin \theta \frac{d^2 s}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \cos \theta \frac{d^2 s}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1), il vient

$$\sin \theta \frac{d^2 s}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = -kg \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos \theta \frac{d^2 s}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = -g(1 - k \sin^2 \theta),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \cos \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = g(1 - k) \sin \theta,$$

ou, en remarquant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \cos \theta, \\ v \frac{d\theta}{dt} = g(1 - k) \sin \theta. \end{cases}$$

Ces deux dernières équations nous donnent par division

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\cos \theta d\theta}{(1 - k) \sin \theta},$$

et en intégrant, et désignant par v_0 la vitesse initiale, c'est-à-dire la vitesse pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$lv = lv_0 - \frac{1}{(1 - k)} l \sin \theta,$$

d'où

$$(3) \quad v = v_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

De la seconde des équations (2) on déduit

$$(4) \quad dt = \frac{v d\theta}{(1 - k) g \sin \theta} = \frac{v_0 d\theta}{(1 - k) g (\sin \theta)^{\frac{2-k}{1-k}}},$$

et, comme $ds = v dt$,

$$(5) \quad ds = \frac{v_0^2}{(1-k)g} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}};$$

mais on a aussi

$$dx = ds \sin \theta \quad \text{et} \quad dy = ds \cos \theta,$$

d'où

$$(6) \quad dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{2}{1-k}}},$$

qu'on ramène à une différentielle binôme en posant $\sin\theta = z$

$$(7) \quad dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g} z^{-\frac{2}{1-k}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

On a aussi

$$(8) \quad dy = \frac{v_0^2}{(1-k)g} \frac{\cos\theta d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}} = \frac{v_0^2}{(1-k)g} (\sin\theta)^{-\frac{3-k}{1-k}} \cos\theta d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$y = -\frac{v_0^2}{2g} (\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}} + \text{const.}$$

Or, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, et il vient

$$(9) \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - (\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}} \right].$$

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe, nous prendrons la formule

$$\frac{dx}{dy} = \tan\theta.$$

L'équation (9) nous donnera

$$\sin \theta = \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 - 2g\gamma} \right)^{\frac{1-k}{2}} = \frac{v_0^{1-k}}{(v_0^2 - 2g\gamma)^{\frac{1-k}{2}}},$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{v_0^{2(1-k)}}{(v_0^2 - 2g\gamma)^{1-k}}};$$

donc

$$(10) \quad dr = \frac{v_0^{1-k} d\gamma}{\sqrt{(v_0^2 - 2g\gamma)^{1-k} - v_0^{2(1-k)}}}$$

sera l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Cette expression sera intégrable lorsqu'on aura

$$\frac{1}{1-k} = \text{entier ou bien } \frac{1}{1-k} - \frac{1}{2} = \text{entier}.$$

La première condition est satisfaite quand on suppose $k = 0$ et $k = 2$, la seconde pour $k = -1$ et $k = 3$.

Examinons maintenant ces cas particuliers.

1° Soit $k = 0$. Nous aurons pour la vitesse

$$v = \frac{v_0}{\sin \theta};$$

la longueur de l'arc de courbe sera donnée par la formule (5),

$$ds = \frac{v_0^2}{g} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta},$$

dont l'intégrale est

$$s = \frac{v_0^2}{2g} \left(l \tan \frac{1}{2} \theta - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right).$$

La formule (10) donne pour l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0 d\gamma}{\sqrt{(v_0^2 - 2g\gamma) - v_0^2}} = \frac{v_0 d\gamma}{\sqrt{-2g\gamma}},$$

et en intégrant, et remarquant que $x = 0$ pour $y = 0$, il vient

$$x^2 = - \frac{2v_0^2}{g} y,$$

équation d'une parabole dont l'axe est l'axe des abscisses.

2° Soit $k = 1$. — Ce cas ne peut pas se déduire des formules générales trouvées précédemment. Nous devons reprendre les formules primitives (2) et y faire $k = 1$; il viendra alors

$$\frac{dv}{dt} = -g \cos \theta,$$

$$v \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

La dernière nous apprend que $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ou $\theta = \text{const.}$

En intégrant la première, nous trouvons

$$v = v_0 - gt \cos \theta.$$

De $ds = v dt$, on déduit

$$ds = (v_0 - gt \cos \theta) dt,$$

d'où

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \cos \theta.$$

Enfin,

$$\frac{dx}{dy} = \tan \theta,$$

d'où

$$x = y \tan \theta,$$

puisque $\theta = \text{const.}$

Donc, dans ce cas, la courbe devient une ligne droite, et le mouvement est uniformément varié.

3° Soit $k = 2$. — La formule (3) donne, pour la vitesse au point m de la courbe,

$$v = v_0 \sin \theta.$$

La formule (4) donne

$$dt = -\frac{v_0 d\theta}{g}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_0}{g} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Nous aurons aussi

$$ds = -\frac{v_0^2}{g} \sin \theta d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{g} \cos \theta.$$

Enfin, la formule (10) donne l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0^{-1} dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^{-1} - v_0^{-2}}} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy} dy}{\sqrt{2gy}},$$

$$dx = \frac{(v_0^2 - 2gy) dy}{\sqrt{2gy} (v_0^2 - 2gy)}.$$

C'est l'équation différentielle de la cycloïde.

En posant

$$v_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{z dz}{2g \sqrt{z(v_0^2 - z)}},$$

d'où, en intégrant,

$$x = \frac{1}{2g} \sqrt{2gy(v_0^2 - 2gy)} - \frac{v_0^2}{4g} \arccos \frac{4gy - v_0^2}{v_0^2}.$$

4° Soit $k = 3$. — Nous aurons alors, à cause de la formule (3),

$$v = v_0 \sqrt{\sin \theta};$$

à cause de la formule (5),

$$ds = -\frac{v_0^2}{2g} d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

La formule (10) donnera

$$dx = \frac{(\nu_0^2 - 2gy) dy}{\sqrt{\nu_0^4 - (\nu_0^2 - 2gy)^2}},$$

d'où, en intégrant, il vient

$$x = \frac{1}{2g} \sqrt{\nu_0^4 - (\nu_0^2 - 2gy)^2},$$

enfin

$$x^2 + \left(y - \frac{\nu_0^2}{2g}\right)^2 = \frac{\nu_0^4}{4g^2}.$$

Donc, dans ce cas, la courbe est un cercle de rayon $\frac{\nu_0^2}{2g}$.

5° Soit $k = -1$. — La vitesse est, dans ce cas,

$$v = \frac{\nu_0}{\sqrt{\sin \theta}};$$

l'arc de la courbe sera donné par

$$ds = \frac{\nu_0^2}{2g} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}, \quad \text{d'où} \quad s = -\frac{\nu_0^2}{2g} \cot \theta;$$

enfin, la formule (10) donne pour la courbe

$$dx = \frac{\nu_0^2 dy}{\sqrt{(\nu_0^2 - 2gy)^2 - \nu_0^4}}.$$

C'est l'équation différentielle de la chaînette.

En posant

$$\nu_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{\nu_0^2}{2g} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \nu_0^4}},$$

et, en intégrant cette expression, il vient

$$x = \frac{\nu_0^2}{2} \left(c \frac{2gx}{\nu_0^4} + c' - \frac{2gx}{\nu_0^4} \right);$$

donc l'équation de la courbe sera

$$\nu_0^2 - 2gy = \frac{\nu_0^2}{2} \left(e^{\frac{2gx}{\nu_0^2}} + e^{-\frac{2gx}{\nu_0^2}} \right).$$

Les deux cas $k = -2$ et $k = -3$ se ramènent simplement aux fonctions elliptiques de première espèce.

1° Soit $k = -2$. — La vitesse sera donnée par la formule (3),

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt[3]{\sin \theta}};$$

la longueur de l'arc de la courbe sera, formule (5),

$$ds = \frac{\nu_0^2 d\theta}{3g \sin \theta \sqrt[3]{\sin^2 \theta}};$$

l'ordonnée y d'un point quelconque en fonction de l'angle θ est

$$y = \frac{\nu_0^2}{2g} \left[1 - (\sin \theta)^{\frac{2}{3}} \right];$$

enfin, l'équation de la courbe est, en vertu de l'équation (10),

$$dx = \frac{\nu_0^3 dy}{\sqrt{\nu_0^2 - 2gy}^3 - \nu_0^6} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{\nu_0^2}\right)^3 - 1}}.$$

Or, en posant dans cette dernière

$$\left(1 - \frac{2gy}{\nu_0^2}\right) = z,$$

il vient

$$dx = \frac{-\nu_0^2}{2g} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}} = \frac{-\nu_0^2}{2g} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z^2+z+1)}}.$$

Si maintenant on fait comme Legendre (*Mémoires de*

l'Académie, 1786),

$$2z + 1 + 2\sqrt{z^2 + z + 1} = q,$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{q^2 - 6q - 3}} = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{(q - \alpha)(q + \beta)}},$$

en désignant par α et $-\beta$ les racines de l'équation $q^2 - 6q - 3 = 0$,

$$\alpha = 2\sqrt{3} + 3 \quad \text{et} \quad \beta = 2\sqrt{3} - 3.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$q = \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi},$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g\sqrt{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

en posant

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

On voit donc que $k = -2$ donne une fonction elliptique de première espèce.

2° Soit $k = -3$. — Nous aurons successivement pour la vitesse x , la longueur de l'arc et l'ordonnée en fonction de θ ,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\sin \theta}},$$

$$ds = \frac{v_0^2 d\theta}{4g \sin \theta \sqrt{\sin \theta}},$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \right),$$

enfin, pour l'équation de la courbe,

$$dx = \frac{v_0^4 dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^4 - v_0^8}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right)^4 - 1}}.$$

Or, en posant

$$1 - \frac{2gy}{v_0^2} = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g} \frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}} = -\frac{v_0^2}{2g} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}}.$$

et si l'on fait

$$z = -\frac{1}{\cos \varphi},$$

on aura

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}},$$

formule qui nous ramène encore aux fonctions elliptiques de première espèce.